物理工学専攻院試解答集
2016 年度物理学 II 第 4 問

政岡凜太郎

[1.1] 放物線バンドの状態密度

エネルギーが $\epsilon > 0$ 以下の状態は $\boldsymbol{k}$ 空間で楕円体の内部にある。その半軸は $k_i = \sqrt{2m_i\epsilon}/\hbar$ である。スピン自由度を数えず、$\boldsymbol{k}$ 空間で 1 状態が占める体積を $(2\pi)^3$ とすると、単位実空間体積当たりの状態数は

$$n(\epsilon) = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{4\pi}{3}\prod_{i=1}^{3}\frac{\sqrt{2m_i\epsilon}}{\hbar} = \frac{(2\epsilon)^{3/2}\sqrt{m_1m_2m_3}}{6\pi^2\hbar^3}. \tag{1}$$

これを ϵ で微分して

$$\boxed{\rho_{3\mathrm{D}}(\epsilon) = \frac{\sqrt{2m_1m_2m_3\epsilon}}{2\pi^2\hbar^3} \quad (\epsilon \geq 0),} \tag{2}$$

負のエネルギーでは $\rho_{3\mathrm{D}} = 0$ である。状態密度はバンド端から $\sqrt{\epsilon}$ に比例して増加する。

[1.2] 波数の時間発展

速度成分は $v_x = \hbar k_x/m_1$、$v_y = \hbar k_y/m_2$、$v_z = \hbar k_z/m_3$ である。電子の符号 $-e$ と $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ から

$$\dot{k}_x = -\frac{eB}{m_2}k_y, \qquad \dot{k}_y = \frac{eB}{m_1}k_x, \qquad \dot{k}_z = 0. \tag{3}$$

従って $\ddot{k}_x = -(eB)^2k_x/(m_1m_2)$ であり、正の角周波数は

$$\boxed{\omega_c = \frac{eB}{\sqrt{m_1m_2}}}. \tag{4}$$

初期条件と設問の k_x の形より

$$\boxed{k_x(t) = k_{0x}\cos(\omega_c t), \quad k_y(t) = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}k_{0x}\sin(\omega_c t), \quad k_z(t) = k_{0z}.} \tag{5}$$

[1.3] 波数軌道

消去すると

$$\frac{k_x^2}{k_{0x}^2} + \frac{k_y^2}{(\sqrt{m_2/m_1}\,k_{0x})^2} = 1. \tag{6}$$

したがって k_x–k_y 平面では楕円を描く。$t = 0$ で $(k_x, k_y) = (k_{0x}, 0)$ にあり、$\dot{k}_y(0) > 0$ なので、時間とともに上向きに進む。

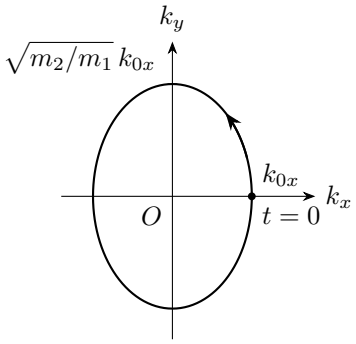


図 1: 放物線バンドの波数軌道。図では $m_2 = 2m_1$ とし、軸上のラベルには一般の半軸長を示す。矢印は時間の増加方向を示す。

[1.4] 実空間の軌道

群速度を積分し、$\boldsymbol{r}(0) = 0$ を使うと

$$x(t) = \frac{\hbar k_{0x}}{m_1 \omega_c} \sin(\omega_c t), \tag{7}$$

$$y(t) = \frac{\hbar k_{0x}}{\sqrt{m_1 m_2}\,\omega_c} [1 - \cos(\omega_c t)], \tag{8}$$

$$z(t) = \frac{\hbar k_{0z}}{m_3} t. \tag{9}$$

xy 平面への射影は中心が $y = \hbar k_{0x}/(\sqrt{m_1 m_2}\,\omega_c)$ にある楕円である。$t = 0$ では原点から x 正方向へ進む。z は一定速度で増えるので、三次元軌道はこの楕円を射影にもつらせんである。

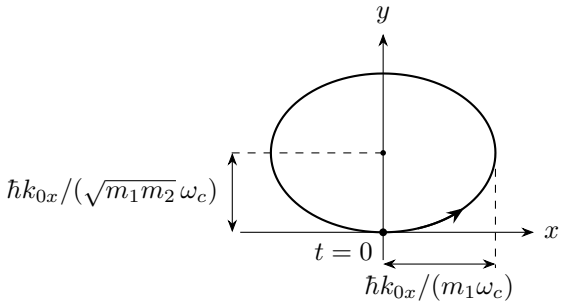


図 2: 放物線バンドの実空間軌道の xy 射影。図 1と同じ $m_2 = 2m_1$ の例。初期位置は原点で、矢印は時間の増加方向を示す。

[2.1] 線形バンドの状態密度

2 次元では状態密度は $\boldsymbol{k}$ 空間の面積で数える。エネルギーの絶対値が $|\epsilon|$ 以下の状態の波数半径は $k = |\epsilon|/\gamma$ であり、1 枝当たりの単位面積当たり状態数は

$$n(\epsilon) = \frac{\pi k^2}{(2\pi)^2} = \frac{\epsilon^2}{4\pi\gamma^2}. \tag{10}$$

正負どちらの枝についても $|\epsilon|$ で微分した状態密度は

$$\boxed{\rho_{2\mathrm{D}}(\epsilon) = \frac{|\epsilon|}{2\pi\gamma^2}.} \tag{11}$$

よって $\epsilon = 0$ でゼロとなり、正負のエネルギーに対して V 字形に増加する。

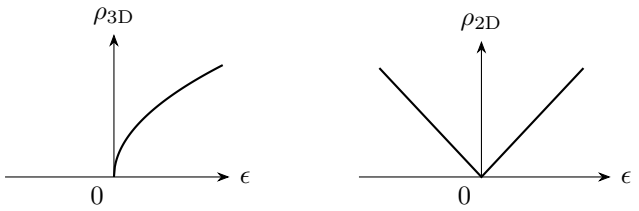


図 3: 放物線バンドと線形バンドの状態密度の概形。各図の尺度は独立で、左は $\sqrt{\epsilon}$、右は $|\epsilon|$ に比例する形を示す。

[2.2] 線形バンドの波数運動

バンドの符号を $s = +1$（$\epsilon > 0$）、$s = -1$（$\epsilon < 0$）で表すと、速度は $\boldsymbol{v} = s(\gamma/\hbar)\boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|$ である。この等方的な分散では $\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{k}$ に平行または反平行である。運動方程式 $\hbar\dot{\boldsymbol{k}} = -e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ の両辺を $\boldsymbol{k}$ と内積すると

$$\frac{d}{dt}|\boldsymbol{k}|^2 = 2\boldsymbol{k} \cdot \dot{\boldsymbol{k}} = -\frac{2e}{\hbar}\boldsymbol{k} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = 0. \tag{12}$$

よって初期値から $|\boldsymbol{k}| = k_0$ となる。この一定値を用いた運動方程式の成分は

$$\dot{k}_x = -s\frac{\gamma eB}{\hbar^2 k_0}k_y, \qquad \dot{k}_y = s\frac{\gamma eB}{\hbar^2 k_0}k_x. \tag{13}$$

従って $\ddot{k}_x = -(\gamma eB/(\hbar^2 k_0))^2 k_x$ である。初期条件を適用すると

$$\boxed{\omega_c = \frac{\gamma eB}{\hbar^2 k_0}}, \qquad \boxed{k_x = k_0\cos(\omega_c t), \quad k_y = sk_0\sin(\omega_c t).} \tag{14}$$

ここでは ω_c を正の角周波数の大きさとして定義し、回転方向を s で表した。

[2.3] 二つの線形バンドの軌道

波数空間では、両枝とも半径 k_0 の円を描く。正の枝は反時計回り、負の枝は時計回りに回る。

位置の速度は

$$v_x = s\frac{\gamma}{\hbar}\cos(\omega_c t), \qquad v_y = \frac{\gamma}{\hbar}\sin(\omega_c t). \tag{15}$$

初期位置を原点として積分すると

$$\boxed{x(t) = s\frac{\gamma}{\hbar\omega_c}\sin(\omega_c t), \qquad y(t) = \frac{\gamma}{\hbar\omega_c}[1 - \cos(\omega_c t)].} \tag{16}$$

$R_c = \gamma/(\hbar\omega_c) = \hbar k_0/(eB)$ とおくと $x^2 + (y - R_c)^2 = R_c^2$ であり、実空間の軌道も原点を通る円である。正の枝は原点から右へ動き、反時計回りに進む。負の枝は原点から左へ動き、時計回りに進む。

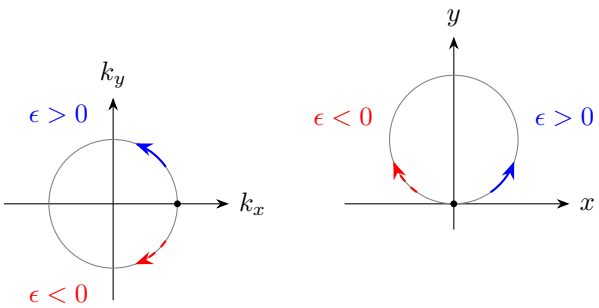


図 4: 線形バンドの波数円と実空間円。実線の矢印は正の枝、破線の矢印は負の枝の時間発展方向を示す。