物理工学専攻院試解答集
2016 年度物理学 II 第 3 問

政岡凜太郎

[1] 束縛電子の運動

電子の電荷は $-e$ なので、電場による力は $-e\boldsymbol{E}$ である。共振振動数 ω_0 の調和復元力も加えると、

$$\boxed{m\ddot{\boldsymbol{x}} = -m\omega_0^2\boldsymbol{x} - e\boldsymbol{E}.} \tag{1}$$

[2] 分極の運動方程式

数密度 N の電子による分極は $\boldsymbol{P} = -eN\boldsymbol{x}$ である。これを時間で 2 回微分し、[1] を使うと

$$\boxed{\ddot{\boldsymbol{P}} + \omega_0^2\boldsymbol{P} = \frac{Ne^2}{m}\boldsymbol{E}.} \tag{2}$$

右辺の符号が正なのは、$\boldsymbol{P}$ と電子変位 $\boldsymbol{x}$ が反対向きだからである。

[3] 誘電率

電場と分極が角周波数 ω で振動するので、$\ddot{P} = -\omega^2 P$ である。従って

$$(\omega_0^2 - \omega^2)P = \frac{Ne^2}{m}E, \qquad \boxed{P = \frac{Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}E}. \tag{3}$$

マクロな関係 $D = \varepsilon_0 E + P = \varepsilon(\omega)E$ より

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \tag{4}$$

[4] 誘電体中の分散関係

問題文の波動方程式 (3) に平面波を代入すると $-k^2E + \varepsilon(\omega)\mu_0\omega^2 E = 0$ だから

$$\boxed{k^2 = \mu_0\varepsilon(\omega)\omega^2}. \tag{5}$$

プラズマ角周波数を $\omega_p^2 = Ne^2/(\varepsilon_0 m)$、$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}$ とおく。真空中の光速 $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ を使えば

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}. \tag{6}$$

[5] 誘電体の実部・虚部

正の角周波数に対して、分子と分母の符号を比べる。$+z$ 方向へ進む波には、伝搬域で $\mathrm{Re}\,k>0$、非伝搬域で $\mathrm{Im}\,k>0$ となる枝を選ぶ。

周波数域	$\mathrm{Re}\,k$	$\mathrm{Im}\,k$
$0<\omega<\omega_0$	$\dfrac{\omega}{c}\sqrt{\dfrac{\omega_1^2-\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2}}$	0
$\omega_0<\omega<\omega_1$	0	$\dfrac{\omega}{c}\sqrt{\dfrac{\omega_1^2-\omega^2}{\omega^2-\omega_0^2}}$
$\omega>\omega_1$	$\dfrac{\omega}{c}\sqrt{\dfrac{\omega^2-\omega_1^2}{\omega^2-\omega_0^2}}$	0

(7)

誘電体の非伝搬帯では $k=i\kappa$（$\kappa>0$）を選ぶ。位相因子は $e^{ikz}=e^{-\kappa z}$ となり、$+z$ 方向へ進むと振幅が減衰する。これはエバネッセント場の空間的減衰であり、この無減衰模型での吸収損失を意味しない。共振 ω_0 では理想化した無減衰模型の k が発散し、ω_1 では $k=0$ となる。

図の例では $\Omega=\omega/\omega_0$、$K=ck/\omega_0$ と規格化し、$\omega_1/\omega_0=2$ を選ぶ。従って $\omega_p/\omega_0=\sqrt{3}$ であり、実部・虚部の枝は直前の分散式から

$$\mathrm{Re}\,K=\begin{cases}\Omega\sqrt{\dfrac{4-\Omega^2}{1-\Omega^2}}, & 0<\Omega<1,\\ 0, & 1<\Omega<2,\\ \Omega\sqrt{\dfrac{\Omega^2-4}{\Omega^2-1}}, & \Omega>2,\end{cases}\qquad \mathrm{Im}\,K=\begin{cases}\Omega\sqrt{\dfrac{4-\Omega^2}{\Omega^2-1}}, & 1<\Omega<2,\\ 0, & 0<\Omega<1 \text{ または} \Omega>2.\end{cases} \tag{8}$$

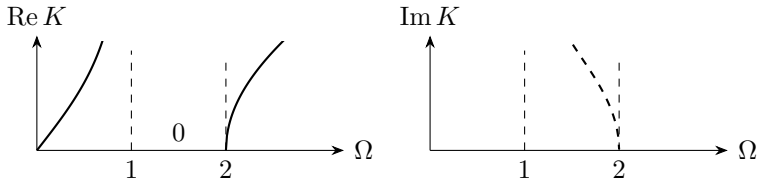


図 1: 誘電体の規格化波数 K の実部（実線）と虚部（破線）。共振近傍で発散する枝は枠外へ続く。

[6] 金属中の自由電子

金属中の電子には束縛復元力がない。磁気力を無視すると、電場による運動方程式は

$$\boxed{m\ddot{\boldsymbol{x}}=-e\boldsymbol{E}.} \tag{9}$$

分極 $\boldsymbol{P}=-en_e\boldsymbol{x}$ を導入すれば、調和応答では

$$P=-\frac{n_e e^2}{m\omega^2}E,\qquad \varepsilon_m(\omega)=\varepsilon_0\left(1-\frac{\omega_{pm}^2}{\omega^2}\right),\qquad \omega_{pm}^2=\frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m}. \tag{10}$$

[7] 金属の実部・虚部

分散関係は

$$k^2=\mu_0\varepsilon_0(\omega^2-\omega_{pm}^2)=\frac{\omega^2-\omega_{pm}^2}{c^2}. \tag{11}$$

ここでは $\Omega = \omega/\omega_{pm}$、$K = ck/\omega_{pm}$ とおくと、正周波数で

$$\operatorname{Re} K = \begin{cases} 0, & 0 < \Omega < 1, \\ \sqrt{\Omega^2 - 1}, & \Omega > 1, \end{cases} \qquad \operatorname{Im} K = \begin{cases} \sqrt{1 - \Omega^2}, & 0 < \Omega < 1, \\ 0, & \Omega > 1. \end{cases} \tag{12}$$

となる。従って正の角周波数では

$$\boxed{\begin{aligned} 0 < \omega < \omega_{pm}: \quad & \operatorname{Re} k = 0, \quad \operatorname{Im} k = \frac{1}{c}\sqrt{\omega_{pm}^2 - \omega^2}, \\ \omega > \omega_{pm}: \quad & \operatorname{Re} k = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_{pm}^2}, \quad \operatorname{Im} k = 0. \end{aligned}} \tag{13}$$

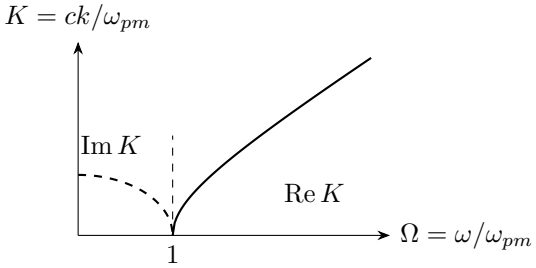


図 2: 金属の規格化波数 K の実部（実線）と虚部（破線）。

[8] 誘電体と金属の光学的性質

可視光を各模型の低周波数側とみなす。束縛電子をもつ誘電体で $\omega \ll \omega_0$ なら k は実数であり、波は媒質内を伝搬する。対して金属で $\omega < \omega_{pm}$ なら k は虚数であり、電場は表面から内部へ指数関数的に減衰する。内部にはエバネッセント場が存在する。ここで H_y は磁場の強さの y 成分である。位相因子 $e^{i(kz-\omega t)}$ に対する Faraday の法則 $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu_0 \partial_t \boldsymbol{H}$ の y 成分は $ikE_x = i\omega\mu_0 H_y$ だから、$H_y = kE_x/(\mu_0\omega)$ となる。k が純虚数なので、時間平均の法線エネルギー流は $\operatorname{Re}(E_x H_y^*)/2 = |E_x|^2 \operatorname{Re}(k)/(2\mu_0\omega) = 0$ である。散逸のない半無限金属に平均電力は伝わらず、入射電力は反射される。金属内部の空間的減衰を吸収損失とは解釈しない。