物理工学専攻院試解答集
2016 年度物理学 II 第 1 問

政岡凜太郎

[1] 数演算子と消滅演算子

交換子の積の公式 $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$ を用いると

$$[\hat{N}, \hat{a}] = [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}] = \hat{a}^\dagger [\hat{a}, \hat{a}] + [\hat{a}^\dagger, \hat{a}]\hat{a} = -\hat{a}. \tag{1}$$

このため

$$\hat{N}(\hat{a}|n+1\rangle) = \hat{a}\hat{N}|n+1\rangle - \hat{a}|n+1\rangle = n\hat{a}|n+1\rangle. \tag{2}$$

従って $\hat{a}|n+1\rangle$ は固有値 n の固有状態に比例する。規格化された固有状態の位相を適当に選び、$\hat{a}|n+1\rangle = c_n|n\rangle$（$c_n \geq 0$）と書く。係数はノルムの二乗から

$$c_n^2 = \langle n+1|\hat{a}^\dagger \hat{a}|n+1\rangle = n+1 \tag{3}$$

なので、

$$\boxed{\hat{a}|n+1\rangle = \sqrt{n+1}|n\rangle.} \tag{4}$$

同様に

$$\|\hat{a}|0\rangle\|^2 = \langle 0|\hat{N}|0\rangle = 0 \tag{5}$$

だから $\boxed{\hat{a}|0\rangle = 0}$ である。

[2] コヒーレント状態の固有値

互いに直交規格化された数状態を使うと

$$\langle \Psi(\alpha)|\Psi(\alpha)\rangle = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = 1. \tag{6}$$

消滅演算子を級数に作用させ、[1] を使って添字をずらすと

$$\hat{a}|\Psi(\alpha)\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{n}\,|n-1\rangle \tag{7}$$

$$= \alpha e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha^j}{\sqrt{j!}} |j\rangle = \boxed{\alpha|\Psi(\alpha)\rangle}. \tag{8}$$

[3] エネルギー期待値

[2] の固有値式と規格化を、$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ の期待値に用いると

$$\langle \hat{N} \rangle = \|\hat{a}|\Psi(\alpha)\rangle\|^2 = |\alpha|^2 \langle \Psi(\alpha)|\Psi(\alpha)\rangle = |\alpha|^2. \tag{9}$$

従って

$$\boxed{\langle \hat{H} \rangle = \hbar\omega \left(|\alpha|^2 + \frac{1}{2} \right).} \tag{10}$$

[4] 平均値と不確定性

生成・消滅演算子の定義を足し引きすると

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \qquad \hat{p} = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger). \tag{11}$$

固有状態の性質から $\langle\hat{a}\rangle = \alpha$、$\langle\hat{a}^\dagger\rangle = \alpha^*$ なので

$$\boxed{\langle\hat{x}\rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\,\Re\alpha}, \qquad \boxed{\langle\hat{p}\rangle = \sqrt{2m\hbar\omega}\,\Im\alpha}. \tag{12}$$

また $\langle\hat{a}^2\rangle = \alpha^2$、$\langle\hat{a}^{\dagger 2}\rangle = (\alpha^*)^2$、$\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle = |\alpha|^2$、$\langle\hat{a}\hat{a}^\dagger\rangle = |\alpha|^2 + 1$ より

$$\langle\hat{x}^2\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\left[(\alpha + \alpha^*)^2 + 1\right], \tag{13}$$

$$\langle\hat{p}^2\rangle = -\frac{m\hbar\omega}{2}\left[(\alpha - \alpha^*)^2 - 1\right]. \tag{14}$$

平均値の二乗をそれぞれ引くと、

$$\boxed{\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}}, \qquad \boxed{\Delta p = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}}, \qquad \boxed{\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}}. \tag{15}$$

各標準偏差は正であり、積はハイゼンベルクの下限に等しい。

[5] 時間発展

数状態ごとの時間発展は

$$e^{-i\hat{H}t/\hbar}|n\rangle = e^{-i\omega t(n+1/2)}|n\rangle. \tag{16}$$

これを状態の級数に適用すると

$$e^{-i\hat{H}t/\hbar}|\Psi(\alpha_0)\rangle = e^{-i\omega t/2}e^{-|\alpha_0|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_0 e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \tag{17}$$

$$= e^{-i\omega t/2}|\Psi(\alpha_0 e^{-i\omega t})\rangle. \tag{18}$$

従って

$$\boxed{\alpha(t) = \alpha_0 e^{-i\omega t} = Ae^{i(\theta - \omega t)}}. \tag{19}$$

前の因子 $e^{-i\omega t/2}$ は全ての数状態に共通する全体位相であり、期待値には影響しない。

[6] 古典的な運動と準古典状態

時刻 t で $\alpha(t) = Ae^{i(\theta-\omega t)}$ を位置・運動量の平均式に代入すると

$$\boxed{\langle\hat{x}\rangle_t = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}A\cos(\omega t - \theta)}, \tag{20}$$

$$\boxed{\langle\hat{p}\rangle_t = -\sqrt{2m\hbar\omega}A\sin(\omega t - \theta)}. \tag{21}$$

これらは古典調和振動子の位置・運動量の時間変化そのものである。振幅は A に比例する一方、Δx と Δp は A に依存しない。それぞれの振動振幅に対する標準偏差の比は $1/(2A)$ であり、$A \gg 1$ では波束の広がりが古典軌道の振幅より十分小さくなる。この意味で準古典状態と呼ばれる。