物理工学専攻院試解答集
2016 年度物理学 I 第 2 問

政岡凜太郎

[1] リングを貫く磁束

リングの中心を $(X,0,0)$、面内の中心からの座標を (u,v) とする。円盤上では $x=X+u$、$z=0$ であり、面積要素の法線を $+z$ 向きにとると、

$$\Phi(X) = \int_{u^2+v^2\le a^2} B_0[1+\alpha(X+u)]\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{1}$$

$$= B_0(1+\alpha X)\pi a^2 + B_0\alpha \int_{u^2+v^2\le a^2} u\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{2}$$

$$= \boxed{\pi a^2 B_0(1+\alpha X)}. \tag{3}$$

円盤は $u\mapsto -u$ で対称なので、積分中の奇関数 u の項はゼロである。

[2] 一定速度で運動するときの電流

正の面法線を $+z$ にとると、正の周回方向は反時計回りである。X が速度 $V>0$ で増えるため、$+z$ 向きの磁束が増加する。ファラデーの法則

$$IR = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{4}$$

の負号は誘導電流が磁束の増加を妨げることを表す。よって符号付き電流は

$$\boxed{I = -\frac{\pi a^2 B_0 \alpha V}{R}}. \tag{5}$$

負号は、実際の電流が図の正方向と逆の時計回りであることを示す。

[3] 一定速度を保つための力

電流が流れるリングに働く磁気力は、周回方向の電流要素と磁場とのローレンツ力から求まる。円周上の角度を ϑ とすると、正の周回方向の電流要素は $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = a(-\sin\vartheta,\cos\vartheta,0)\,\mathrm{d}\vartheta$ である。リング上では $z=0$、$x=X+a\cos\vartheta$ なので、$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}\times\boldsymbol{B}$ より

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{mag},x} = IaB_0\cos\vartheta[1+\alpha(X+a\cos\vartheta)]\,\mathrm{d}\vartheta, \tag{6}$$

$$F_{\mathrm{mag},x} = IaB_0\int_0^{2\pi}[(1+\alpha X)\cos\vartheta + \alpha a\cos^2\vartheta]\,\mathrm{d}\vartheta = I\pi a^2 B_0\alpha. \tag{7}$$

ここで B_z の一様部分の寄与は一周積分で相殺し、x に比例する部分だけが残る。したがって一定速度では、加えた外力がこの磁気抵抗力とつり合う。外力の大きさは

$$\boxed{F = \frac{(\pi a^2 B_0\alpha)^2}{R}V}. \tag{8}$$

この結果は電力でも確認できる。外力の仕事率 FV は RI^2 に等しい。

[4] 時間変化する磁場と運動方程式

磁束は

$$\Phi(X,t) = \pi a^2 B_0 b(t)(1+\alpha X) \tag{9}$$

である。正の電流を反時計回りとする規約を保つと、起電力と電流は

$$IR = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\pi a^2 B_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[b(t)(1+\alpha X)]. \tag{10}$$

角度 ϑ の電流要素を $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = a(-\sin\vartheta, \cos\vartheta, 0)\,\mathrm{d}\vartheta$ とすると、$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}\times\boldsymbol{B}$ である。$x = X + a\cos\vartheta$ を代入して一周積分すると、x 成分は

$$F_{\mathrm{mag},x} = I\pi a^2 B_0 \alpha b(t), \tag{11}$$

となる。運動方程式 $m\ddot{X} = F_{\mathrm{mag},x}$ に式(10)を代入すると

$$m\ddot{X} = -\frac{(\pi a^2 B_0)^2 \alpha}{R} b(t) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[b(t)(1+\alpha X)]. \tag{12}$$

したがって問題文の形では

$$\boxed{\alpha\ddot{X} = -\lambda b(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[b(t)(1+\alpha X)]}, \qquad \boxed{\lambda = \frac{(\pi a^2 B_0 \alpha)^2}{mR}}. \tag{13}$$

λ の次元は時間の逆数である。

[5] べき級数の初期係数

$0 \le t < \tau$ では $b(t) = t/\tau$ だから、運動方程式は

$$\alpha\ddot{X} = -\frac{\lambda t}{\tau^2}\left(1 + \alpha X + \alpha t\dot{X}\right). \tag{14}$$

初期条件 $X(0) = 0$、$\dot{X}(0) = 0$ を $X = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ に適用すると、$a_0 = a_1 = 0$ である。式(14)の t^0 の係数を比べると、左辺は $2\alpha a_2$、右辺はゼロなので、$a_2 = 0$ となる。

[6] 短時間近似での速度

式(14)の t^1 の係数を比べ、$a_0 = 0$ を使うと

$$6\alpha a_3 = -\frac{\lambda}{\tau^2}, \qquad \boxed{a_3 = -\frac{\lambda}{6\alpha\tau^2}}. \tag{15}$$

問題文の $\tau \ll 1/\lambda$ の近似では $X \simeq a_3 t^3$ なので、$t = \tau$ での速度は

$$\boxed{V_0 = \dot{X}(\tau) \simeq 3a_3\tau^2 = -\frac{\lambda}{2\alpha}}. \tag{16}$$

負号はリングが初期位置から $-x$ 方向へ動くことを表す。

[7] 最終位置

$t \geq \tau$ では $b(t) = 1$ であり、運動方程式は

$$\ddot{X} + \lambda \dot{X} = 0. \tag{17}$$

したがって速度は $\dot{X}(t) = V_0 e^{-\lambda(t-\tau)}$ と減衰し、無限時間後の変位は V_0/λ である。設問 [6]–[7] で指定された三次近似 $X \simeq a_3 t^3$ を用いると、

$$X(\tau) \simeq -\frac{\lambda\tau}{6\alpha}, \qquad V_0 \simeq -\frac{\lambda}{2\alpha}. \tag{18}$$

従って、この指定された近似の下での答えは

$$\boxed{X(\infty) \simeq X(\tau) + \frac{V_0}{\lambda} = -\frac{1}{2\alpha} - \frac{\lambda\tau}{6\alpha}}. \tag{19}$$

この三次近似の結果と、運動方程式の漸近展開の精度は区別する必要がある。$\epsilon = \lambda\tau$、$u = t/\tau$、$y = \alpha X$ と置くと、$0 \leq u \leq 1$ で式(14)は

$$y''(u) = -\epsilon u[1 + y(u) + u y'(u)], \qquad y(0) = y'(0) = 0 \tag{20}$$

となる。この有限区間の線形初期値問題を ϵ で順に展開すると

$$y(u) = -\frac{\epsilon u^3}{6} + \frac{\epsilon^2 u^6}{45} + O(\epsilon^3), \qquad y'(u) = -\frac{\epsilon u^2}{2} + \frac{2\epsilon^2 u^5}{15} + O(\epsilon^3) \tag{21}$$

を得る。従って $X(\tau) = y(1)/\alpha$、$V_0/\lambda = y'(1)/(\alpha\epsilon)$ を足した漸近展開は

$$X(\infty) = -\frac{1}{2\alpha} - \frac{\lambda\tau}{30\alpha} + O\left(\frac{(\lambda\tau)^2}{\alpha}\right). \tag{22}$$

三次近似だけで得た箱内の一次係数 $-1/6$ は、V_0 の次の補正を含めないため、この漸近展開の一次係数とは異なる。

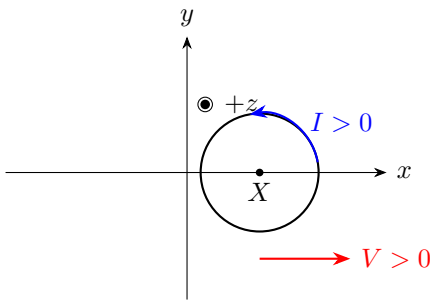


図 1: 磁束と電流の符号規約。紙面の手前が $+z$、正電流はその向きから見て反時計回り。