物理工学専攻院試解答集
2016 年度物理学 I 第 1 問

政岡凜太郎

[1] 単振り子の運動方程式

角度 θ_1 を鉛直下向きから測る。支点まわりの重力のモーメントは $-m_1 g l_1 \sin\theta_1$、慣性モーメントは $m_1 l_1^2$ なので、

$$m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 = -m_1 g l_1 \sin\theta_1, \qquad \ddot{\theta}_1 + \frac{g}{l_1}\sin\theta_1 = 0. \tag{1}$$

小振幅では $\sin\theta_1 \simeq \theta_1$ だから、

$$\ddot{\theta}_1 + \omega_0^2 \theta_1 = 0, \qquad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l_1}}}. \tag{2}$$

[2] 質量の影響

運動方程式では慣性項と重力による復元項の両方が m_1 に比例するため、質量を約すと固有角周波数には m_1 が残らない。一方、平衡位置で同じ大きさの水平撃力 J を加えると、角運動量の変化から角速度の初期値は $\dot{\theta}_1 = J/(m_1 l_1)$ となる。小振幅での角振幅はこの初期角速度を ω_0 で割った

$$\theta_{\max} \simeq \frac{J}{m_1\sqrt{g l_1}}. \tag{3}$$

したがって同じ撃力なら、質量が大きいほど振幅は小さいが、振動の角周波数は変わらない。

[3] 水平力を受けるときの平衡

第 2 棒の鉛直下向きからの絶対角を $\phi = \theta_1 + \theta_2$ とする。質点の位置は

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} l_1\sin\theta_1 \\ -l_1\cos\theta_1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 + \begin{pmatrix} l_2\sin\phi \\ -l_2\cos\phi \end{pmatrix}. \tag{4}$$

独立な一般化座標を (θ_1, ϕ) とし、θ_1 の仮想変位では ϕ を固定する。仮想変位に対する外力と重力の仕事がゼロとなる条件を用いる。θ_1 の変位は両質点の高さを変え、ϕ の変位は質点 m_2 の位置だけを変えるので、

$$F_x l_1 \cos\theta_1 - (m_1+m_2) g l_1 \sin\theta_1 = 0, \tag{5}$$

$$F_x l_2 \cos\phi - m_2 g l_2 \sin\phi = 0. \tag{6}$$

図 2 のように各棒が鉛直下向きから $-\pi/2$ と $\pi/2$ の間にある平衡枝では、

$$\boxed{\theta_1 = \arctan\frac{F_x}{(m_1+m_2)g}}, \qquad \boxed{\phi = \arctan\frac{F_x}{m_2 g}}, \qquad \boxed{\theta_2 = \phi - \theta_1}. \tag{7}$$

[4] 等質量・等長二重振り子のラグランジアン

以後 $m_1 = m_2 = m$、$l_1 = l_2 = l$、$F_x = 0$ とする。θ_1 は第 1 棒の角度、θ_2 は第 1 棒に対する第 2 棒の相対角であり、$\phi = \theta_1 + \theta_2$ は第 2 棒の絶対角である。位置は

$$\boldsymbol{r}_1 = l\begin{pmatrix}\sin\theta_1\\ -\cos\theta_1\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{r}_2 = l\begin{pmatrix}\sin\theta_1 + \sin\phi\\ -\cos\theta_1 - \cos\phi\end{pmatrix}. \tag{8}$$

時間微分すると、質点 2 の速さの二乗に交差項が生じる。

$$T = \frac{m}{2}|\dot{\boldsymbol{r}}_1|^2 + \frac{m}{2}|\dot{\boldsymbol{r}}_2|^2 \tag{9}$$

$$= \frac{ml^2}{2}\left[2\dot\theta_1^2 + \dot\phi^2 + 2\cos\theta_2\,\dot\theta_1\dot\phi\right], \tag{10}$$

$$U = mg(y_1 + y_2) = -mgl\,(2\cos\theta_1 + \cos\phi)\,. \tag{11}$$

よって $L = T - U$ は

$$\boxed{L = \frac{ml^2}{2}\left[2\dot\theta_1^2 + (\dot\theta_1 + \dot\theta_2)^2 + 2\cos\theta_2\,\dot\theta_1(\dot\theta_1 + \dot\theta_2)\right] + mgl\,[2\cos\theta_1 + \cos(\theta_1 + \theta_2)]\,.} \tag{12}$$

第 2 質点の重力位置エネルギーにも第 1 棒による高さ $-l\cos\theta_1$ が含まれるため、$2\cos\theta_1$ の項が現れる。

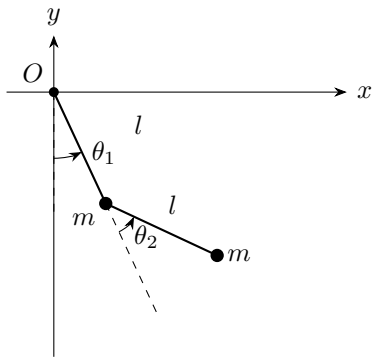


図 1: 等質量・等長二重振り子。θ_2 は第 1 棒から測る相対角である。

[5] 小振幅の運動方程式

小さい θ_1, θ_2 に対して、速度項の $\cos\theta_2$ を 1、ポテンシャルの余弦を 2 次まで展開する。ラグランジアンの定数を除けば

$$L^{(2)} = \frac{ml^2}{2}\begin{pmatrix}\dot\theta_1 & \dot\theta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot\theta_1\\ \dot\theta_2\end{pmatrix} - \frac{mgl}{2}\begin{pmatrix}\theta_1 & \theta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix}. \tag{13}$$

したがって、オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\boxed{\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ddot\theta_1\\ \ddot\theta_2\end{pmatrix} + \frac{g}{l}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix} = \mathbf{0}.} \tag{14}$$

[6] 基準振動

$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{A}e^{i\omega t}$ とおく。$\lambda = \omega^2/(g/l)$ とすると、非自明な振幅ベクトルがある条件は

$$0 = \det\left[\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\right] = (3-5\lambda)(1-\lambda) - (1-2\lambda)^2 = \lambda^2 - 4\lambda + 2. \tag{15}$$

よって $\lambda = 2 \pm \sqrt{2}$ であり、正の二つの固有角周波数は

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{2\pm\sqrt{2}} = \omega_0\sqrt{2\pm\sqrt{2}}, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.} \tag{16}$$

固有値 λ は無次元で、g/l は角周波数の二乗の次元をもつ。