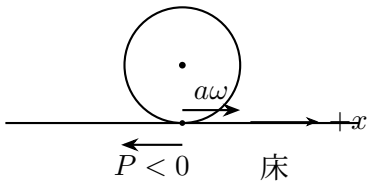
物理工学専攻院試解答集
2015 年度物理学 I 第 1 問

政岡凜太郎

図の $+x$ 方向を右向きとし、$\omega > 0$ は球底面の点が球中心に対して $+x$ 方向へ動く回転とする。球に働く床からの水平力積は符号付きで $P < 0$ である。



[1] 慣性モーメント

球の一様密度は $\rho = 3m/(4\pi a^3)$ である。回転軸から距離 $r\sin\theta$ にある体積要素を積分すると

$$I = \rho \int_0^a r^4\,dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin^3\theta\,d\theta \tag{1}$$

$$= \frac{3m}{4\pi a^3} \cdot \frac{a^5}{5} \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} = \boxed{\frac{2}{5}ma^2}. \tag{2}$$

[2] 衝突直後の滑りなし条件

接触点の速度は、球中心の並進速度 v' と回転による速度 $a\omega'$ の和である。この符号規約では

$$\boxed{v' + a\omega' = 0}. \tag{3}$$

[3] 1 回の衝突

衝突前の水平方向速度は 0 である。床から球への力積が P なので、水平運動量の式は

$$mv' = P. \tag{4}$$

球底面に働く左向き力積は正回転を弱める。球中心まわりの角運動量変化は

$$I(\omega' - \omega) = aP. \tag{5}$$

$P = mv'$ と $v' = -a\omega'$ を代入し、$I = 2ma^2/5$ を使うと

$$\frac{2}{5}ma^2(\omega' - \omega) = -ma^2\omega', \tag{6}$$

$$\boxed{\omega' = \frac{2}{7}\omega}, \qquad \boxed{v' = -\frac{2}{7}a\omega}. \tag{7}$$

[4] 反跳ごとの保存量

n 回目の衝突について、床からの水平力積を符号付きで P_n とすると

$$m(v_n - v_{n-1}) = P_n, \qquad I(\omega_n - \omega_{n-1}) = aP_n. \tag{8}$$

ここで $l_n = I\omega_n - amv_n$ と置く。従って

$$l_n - l_{n-1} = I(\omega_n - \omega_{n-1}) - am(v_n - v_{n-1}) \tag{9}$$

$$= aP_n - aP_n = 0. \tag{10}$$

よって

$$\boxed{l = I\omega_n - amv_n \quad \text{は反跳回数} n \text{ によらず一定.}} \tag{11}$$

[5] 最終的な転がり速度

反跳が終わると接触点速度が 0 なので $v_F = -a\omega_F$ である。従って保存量は

$$l = I\omega_F - amv_F = -\left(\frac{I}{a} + am\right) v_F = -\frac{7}{5}mav_F, \tag{12}$$

最後の等号では $I = 2ma^2/5$ を使った。従って

$$\boxed{v_F = -\frac{5l}{7ma}}. \tag{13}$$

初期値 $l = I\omega_0 - amv_0$ と等置すると

$$\boxed{v_F = \frac{5}{7}v_0 - \frac{2}{7}a\omega_0}. \tag{14}$$

したがって反跳終了時に並進しない条件は

$$\boxed{v_F = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v_0 = \frac{2}{5}a\omega_0}. \tag{15}$$

物理工学専攻院試解答集
2015 年度物理学 I 第 2 問

政岡凜太郎

[1] 無限直線電荷

線電荷から距離 r の同軸円筒をガウス面に選ぶ。長さ l の円筒面を貫く電束は $2\pi rlE(r)$ で、内部電荷は λl だから

$$\boldsymbol{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,\boldsymbol{e}_r, \qquad E(r) = \frac{|\lambda|}{2\pi\varepsilon_0 r}. \tag{1}$$

r_0 を基準に $E_r = -d\phi/dr$ を積分すると

$$\phi(r) - \phi(r_0) = -\int_{r_0}^{r} E_r(r')\,dr' = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{r_0}. \tag{2}$$

よって $\phi(r_0) = 0$ とすれば、原問の式を得る。

[2] 平行な二本の線電荷

点 $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ から $(a,0),(b,0)$ までの距離をそれぞれ r_a, r_b とすると

$$r_a^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta, \qquad r_b^2 = b^2 + r^2 - 2br\cos\theta. \tag{3}$$

[1] のポテンシャルを重ね合わせて

$$\boxed{\phi(r,\theta) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_b}{r_a} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b^2 + r^2 - 2br\cos\theta}{a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta}.} \tag{4}$$

[3] 鏡像電荷と境界条件

線電荷 $+\lambda$ を $(d,0)$、鏡像線電荷 $-\lambda$ を $(D,0)$ に置くと、全ポテンシャルは

$$\phi(r,\theta) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{D^2 + r^2 - 2Dr\cos\theta}{d^2 + r^2 - 2dr\cos\theta}. \tag{5}$$

$r = R$ でこの比が θ に依存しないためには、分子・分母の $\cos\theta$ 係数で割った定数項が等しくなければならない。従って

$$\frac{D^2 + R^2}{2DR} = \frac{d^2 + R^2}{2dR}, \qquad (D-d)(dD - R^2) = 0. \tag{6}$$

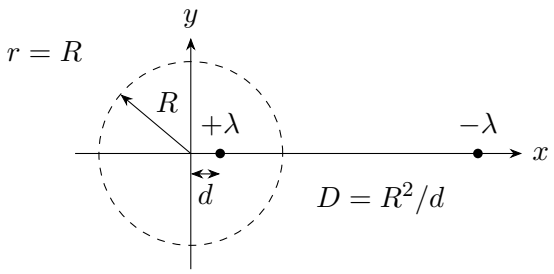
像電荷は空洞外にあるので $D > R > d$、従って

$$\boxed{D = \frac{R^2}{d}}. \tag{7}$$

この鏡像電荷対だけのポテンシャルは $r = R$ で $\lambda \ln(R/d)/(2\pi\varepsilon_0)$ となる。接地条件 $\phi(R,\theta) = 0$ を満たすため、この定数を引く。$D = R^2/d$ を代入してまとめると、空洞内 $(r < R)$ のポテンシャルは

$$\boxed{\phi(r,\theta) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left[\frac{d^2 r^2/R^2 + R^2 - 2dr\cos\theta}{d^2 + r^2 - 2dr\cos\theta}\right].} \tag{8}$$

$r = R$ では分子と分母が等しく、対数の中身が 1 となるため、接地条件を満たす。加えた定数は電場および誘導面電荷密度には影響しない。



[4] 誘導面電荷密度

境界では原問の法線規約により $\sigma(\theta) = \varepsilon_0 \partial_r \phi|_{r=R}$ である。上のポテンシャルを微分し、$D = R^2/d$ を代入すると

$$\sigma(\theta) = \frac{\lambda}{4\pi}\left[\frac{2d^2/R - 2d\cos\theta}{d^2 + R^2 - 2dR\cos\theta} - \frac{2R - 2d\cos\theta}{d^2 + R^2 - 2dR\cos\theta}\right] \tag{9}$$

$$= \boxed{-\frac{\lambda(R^2 - d^2)}{2\pi R(R^2 + d^2 - 2Rd\cos\theta)}}. \tag{10}$$

正の線電荷に対して誘起面電荷は全周で負であり、最も近い $\theta = 0$ 側で絶対値が最大となる。

[5] 誘起電荷の全量

$a = d/R < 1$ と置くと

$$\sigma(\theta) = -\frac{\lambda}{2\pi R}\frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos\theta + a^2} = -\frac{\lambda}{2\pi R}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos n\theta\right). \tag{11}$$

各余弦の一周積分は 0 なので、円筒内側面の単位長さ当たり電荷は

$$\boxed{R\int_0^{2\pi} \sigma(\theta)\, d\theta = -\lambda}. \tag{12}$$

[6] 面密度測定から位置を求める

線電荷の角度が ψ の場合、[4] の式は

$$\sigma(\theta) = -\frac{\lambda}{2\pi R}\left[1 + 2\frac{d}{R}\cos(\theta - \psi)\right] + O\big((d/R)^2\big) \tag{13}$$

となる。以下の対向点の和・差と位置の復元も d/R の一次までであり、対向点で和と差を取れば定数項と反対称な成分を分離できる。

$$\sigma_1 - \sigma_3 = -\frac{2\lambda d}{\pi R^2}\cos\psi, \qquad \sigma_1 + \sigma_3 = -\frac{\lambda}{\pi R}, \tag{14}$$

$$\sigma_2 - \sigma_4 = -\frac{2\lambda d}{\pi R^2}\sin\psi, \qquad \sigma_2 + \sigma_4 = -\frac{\lambda}{\pi R}. \tag{15}$$

従って、$x_0 = d\cos\psi$, $y_0 = d\sin\psi$ より

$$\boxed{x_0 = \frac{R}{2}\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3}, \qquad y_0 = \frac{R}{2}\frac{\sigma_2 - \sigma_4}{\sigma_2 + \sigma_4}.} \tag{16}$$

物理工学専攻院試解答集
2015 年度物理学 II 第 1 問

政岡凜太郎

[1] 1 粒子状態のエネルギー

図の ψ_S は節を持たない対称状態、ψ_A は節を 1 つ持つ反対称状態である。一次元束縛状態では節の少ない状態ほどエネルギーが低いので

$$E_S = -J, \qquad E_A = +J. \tag{1}$$

[2] 局在基底

規格直交する ψ_S, ψ_A より

$$\langle \psi_L | \psi_R \rangle = \frac{1}{2}(\langle \psi_S | \psi_S \rangle - \langle \psi_A | \psi_A \rangle) = 0. \tag{2}$$

また $H\psi_S = -J\psi_S$, $H\psi_A = J\psi_A$ だから、$\{\psi_L, \psi_R\}$ 基底の行列要素は

$$\boxed{H_1 = \begin{pmatrix} 0 & -J \\ -J & 0 \end{pmatrix}.} \tag{3}$$

[3] 1 粒子のトンネル確率

左井戸状態 $|L\rangle$ からの時間発展は

$$e^{-iH_1 t/\hbar}|L\rangle = \cos\left(\frac{Jt}{\hbar}\right)|L\rangle + i\sin\left(\frac{Jt}{\hbar}\right)|R\rangle. \tag{4}$$

従って右井戸にある確率は

$$\boxed{P_R(t) = \sin^2\left(\frac{Jt}{\hbar}\right).} \tag{5}$$

[4] 相互作用のない 2 粒子系

[4.1] ハミルトニアン

対称化された規格化状態は

$$|0\rangle = |LL\rangle, \qquad |1\rangle = \frac{|LR\rangle + |RL\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad |2\rangle = |RR\rangle. \tag{6}$$

一体トンネル項 $-J(|L\rangle\langle R| + |R\rangle\langle L|)$ を各粒子に作用させると

$$H|0\rangle = -\sqrt{2}J|1\rangle, \quad H|1\rangle = -\sqrt{2}J(|0\rangle + |2\rangle), \quad H|2\rangle = -\sqrt{2}J|1\rangle. \tag{7}$$

従って

$$\boxed{H_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2}J & 0 \\ -\sqrt{2}J & 0 & -\sqrt{2}J \\ 0 & -\sqrt{2}J & 0 \end{pmatrix}.} \tag{8}$$

[4.2] 固有エネルギー

反対称な端状態 $(|0\rangle - |2\rangle)/\sqrt{2}$ の固有値は 0。対称な端状態 $(|0\rangle + |2\rangle)/\sqrt{2}$ と $|1\rangle$ に対して、上の行列の制限は $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -2J \\ -2J & 0 \end{smallmatrix}\right)$ となる。この二次元ブロックの固有値は $\pm 2J$ なので

$$\boxed{E = -2J,\ 0,\ 2J.} \tag{9}$$

[4.3] 粒子数確率

初期状態 $|LL\rangle$ は、独立に左右へ移る 2 粒子の積状態である。$x = Jt/\hbar$ とすると

$$P_0(t) = \cos^4 x, \tag{10}$$

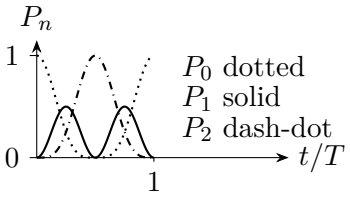
$$P_1(t) = 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{2}\sin^2(2x), \tag{11}$$

$$P_2(t) = \sin^4 x. \tag{12}$$

各時刻で和は 1。原図の選択肢では図 2(a) に対応し、点線が P_0、実線が P_1、一点鎖線が P_2 を表す。確率の共通周期は

$$\boxed{T = \frac{\pi\hbar}{J}}. \tag{13}$$

一周期の概形は次のとおりである。



[5] 強い引力相互作用

[5.1] ハミルトニアン

同一井戸に 2 粒子がある状態のエネルギーを $-A$ だけ下げると、

$$\boxed{H_{-A} = \begin{pmatrix} -A & -\sqrt{2}J & 0 \\ -\sqrt{2}J & 0 & -\sqrt{2}J \\ 0 & -\sqrt{2}J & -A \end{pmatrix}.} \tag{14}$$

[5.2] 固有エネルギー

反対称端状態のエネルギーは $-A$。対称端状態と $|1\rangle$ の部分行列は $\begin{pmatrix} -A & -2J \\ -2J & 0 \end{pmatrix}$ である。従って

$$E = -A, \qquad E_\pm = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 + 16J^2}}{2}. \tag{15}$$

$A \gg J$ で展開すると

$$\boxed{E_- = -A - \frac{4J^2}{A} + O(J^4/A^3), \quad E_a = -A, \quad E_+ = \frac{4J^2}{A} + O(J^4/A^3).} \tag{16}$$

[5.3] 引力の場合の粒子数確率

有限の A に対する確率を求める。同一井戸状態の相互作用エネルギーを一般の符号付き u とし、そのハミルトニアンを $H(u)$ と書く。引力の場合は $u = -A$ である。端状態の対称・反対称な組合せを

$$|s\rangle = \frac{|0\rangle + |2\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad |a\rangle = \frac{|0\rangle - |2\rangle}{\sqrt{2}} \tag{17}$$

と置く。[5.2] と同じ分解により、基底 $(|s\rangle, |1\rangle)$ での部分行列は

$$H_s(u) = \begin{pmatrix} u & -2J \\ -2J & 0 \end{pmatrix}, \qquad H(u)|a\rangle = u|a\rangle \tag{18}$$

である。準位差を $\Delta = \sqrt{u^2 + 16J^2}$ とすると、2 次元の単位行列 $\mathbf{I}$ に対して

$$\left(H_s(u) - \frac{u}{2}\mathbf{I}\right)^2 = \frac{\Delta^2}{4}\mathbf{I}. \tag{19}$$

従って行列指数の偶数べきと奇数べきをまとめれば時間発展を求められる。この小節では $x = \Delta t/(2\hbar)$、$y = ut/(2\hbar)$ と置く。初期状態 $|0\rangle = (|s\rangle + |a\rangle)/\sqrt{2}$ から

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{e^{-iy}}{\sqrt{2}}\left[\left(\cos x - i\frac{u}{\Delta}\sin x\right)|s\rangle + i\frac{4J}{\Delta}\sin x\,|1\rangle\right] \tag{20}$$

$$+ \frac{e^{-2iy}}{\sqrt{2}}|a\rangle. \tag{21}$$

各占有状態へ射影して振幅の絶対値二乗を取ると

$$P_0(t) = \frac{1}{4}\left|e^{-iy}\left(\cos x - i\frac{u}{\Delta}\sin x\right) + e^{-2iy}\right|^2, \tag{22}$$

$$P_1(t) = \frac{8J^2}{\Delta^2}\sin^2 x, \tag{23}$$

$$P_2(t) = \frac{1}{4}\left|e^{-iy}\left(\cos x - i\frac{u}{\Delta}\sin x\right) - e^{-2iy}\right|^2. \tag{24}$$

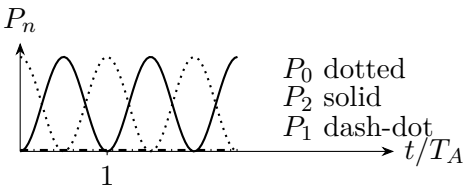
従って有限 A では中間状態 $|1\rangle$ も一般に占有される。$A/J \gg 1$ ではその振幅は小さく、主要な時間変化は二つの同一井戸状態間の遅いペア移動となる。初期状態 $|0\rangle$ は対称状態 $|s\rangle$ と反対称状態 $|a\rangle$ を等重みで含む。$|s\rangle$ を主成分とする低エネルギー固有状態と $|a\rangle$ のエネルギー差は $4J^2/A$ であり、その相対位相から

$$P_0(t) \simeq \cos^2\!\left(\frac{2J^2 t}{A\hbar}\right), \qquad P_2(t) \simeq \sin^2\!\left(\frac{2J^2 t}{A\hbar}\right), \qquad P_1 \ll 1. \tag{25}$$

ペア移動の周期は

$$\boxed{T_A = \frac{2\pi\hbar}{4J^2/A} = \frac{\pi\hbar A}{2J^2}}. \tag{26}$$

図 2(b) に対応する概形は次のとおりである。点線が P_0、実線が P_2、一点鎖線が小さい P_1 である。



[6] 強い斥力相互作用

同じ井戸に 2 粒子があるときのエネルギーを B だけ上げると

$$H_{+B} = \begin{pmatrix} B & -\sqrt{2}J & 0 \\ -\sqrt{2}J & 0 & -\sqrt{2}J \\ 0 & -\sqrt{2}J & B \end{pmatrix}, \qquad E = B, \quad E_{\pm} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 + 16J^2}}{2}. \tag{27}$$

$B \gg J$ では $E_- = -4J^2/B + O(J^4/B^3)$、$E_a = B$、$E_+ = B + 4J^2/B + O(J^4/B^3)$。従って近接する端状態間の遅いペア移動も同じ形であり

$$P_0(t) \simeq \cos^2\!\left(\frac{2J^2 t}{B\hbar}\right), \qquad P_2(t) \simeq \sin^2\!\left(\frac{2J^2 t}{B\hbar}\right), \qquad P_1 \ll 1. \tag{28}$$

原図では同じく図 2(b) で、周期は

$$\boxed{T_B = \frac{\pi\hbar B}{2J^2}}. \tag{29}$$

ここでも有限 B では $P_1(t)$ は厳密にはゼロでなく、[5.3] の厳密式に $u = B$ を入れる。

[7] 引力と斥力の比較

引力 $u = -A$ と斥力 $u = +B$ のどちらでも、同じ絶対値 $|u|$ なら厳密な確率式は同じである。行列

$$H(u) = \begin{pmatrix} u & -\sqrt{2}J & 0 \\ -\sqrt{2}J & 0 & -\sqrt{2}J \\ 0 & -\sqrt{2}J & u \end{pmatrix} \tag{30}$$

に $S = \mathrm{diag}(1, -1, 1)$ を使うと $H(-u) = -SH(u)S$。$H(u)$ は実行列で $S|0\rangle = |0\rangle$ だから、時間発展は

$$e^{-iH(-u)t/\hbar}|0\rangle = S\big[e^{-iH(u)t/\hbar}|0\rangle\big]^*. \tag{31}$$

S は各占有振幅に符号 ± 1 を掛けるだけなので、複素共役後の絶対値二乗も元と同じである。従って各占有数確率と確率グラフの概形は符号反転で変化しない。違うのは同一井戸の対状態が他状態より低いか高いかというエネルギー準位の順序である。

物理工学専攻院試解答集
2015 年度物理学 II 第 2 問

政岡凜太郎

$\beta = 1/(k_B T)$ とする。粒子は古典 Boltzmann 統計に従い、$N!$ で割って同種粒子の重複計数を除く。

[1] 理想気体の分配関数

一粒子の並進分配関数は位置積分と三つの運動量積分の積であり

$$z_1 = \frac{1}{h^3}\int_V d^3r \int_{\mathbb{R}^3} d^3p\, e^{-\beta p^2/(2m)} \tag{1}$$

$$= \frac{V}{h^3}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta p_x^2/(2m)} dp_x\right)^3 = V\left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}. \tag{2}$$

ここで $h = 2\pi\hbar$ とガウス積分を用いた。従って

$$\boxed{Z_0(T,V,N) = \frac{z_1^N}{N!} = \frac{V^N}{N!}\left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3N/2}.} \tag{3}$$

[2] 内部エネルギーと定積比熱

$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z_0 = \boxed{\frac{3}{2}Nk_BT}, \qquad C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,N} = \boxed{\frac{3}{2}Nk_B}. \tag{4}$$

[3] 理想気体の状態方程式

$F_0 = -k_BT\ln Z_0$ であり、V に依存する項は $-Nk_BT\ln V$ だけなので

$$P = -\left(\frac{\partial F_0}{\partial V}\right)_{T,N} = k_BT\frac{\partial \ln Z_0}{\partial V} = \frac{Nk_BT}{V}. \tag{5}$$

従って

$$\boxed{PV = Nk_BT.} \tag{6}$$

[4] 引力と排除体積

原問の一粒子エネルギーは $p^2/(2m) - \alpha N/V$ である。従って全ポテンシャルエネルギーは $-\alpha N^2/V$、Boltzmann 因子は $\exp(\beta\alpha N^2/V)$ となる。短距離斥力によって配置空間体積は $V - Nb$ となるから

$$\boxed{Z(T,V,N) = \frac{(V-Nb)^N}{N!}\left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3N/2}\exp\left(\frac{\alpha N^2}{Vk_BT}\right).} \tag{7}$$

Helmholtz 自由エネルギーは

$$F = -k_B T \ln Z = F_{\rm kin}(T, N) - N k_B T \ln(V - Nb) - \frac{\alpha N^2}{V}, \tag{8}$$

ここで $F_{\rm kin}$ は V に依存しない。よって

$$\boxed{P = -F_V = \frac{N k_B T}{V - Nb} - \frac{\alpha N^2}{V^2}}, \qquad \boxed{\left(P + \frac{\alpha N^2}{V^2}\right)(V - Nb) = N k_B T.} \tag{9}$$

[5] 自由エネルギー最小と安定性

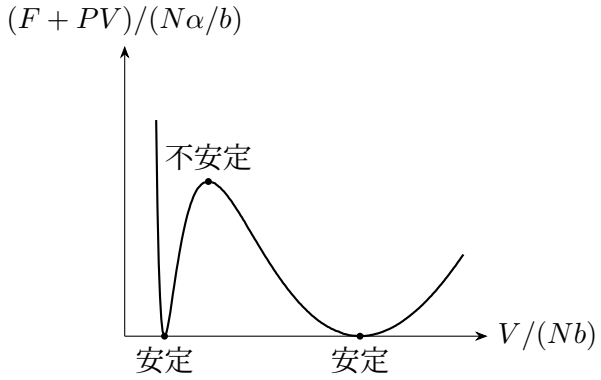
固定した T, N, P に対して $A(V) = F(T, N, V) + PV$ とする。停留点では

$$A'(V) = F_V + P = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad P = -F_V, \tag{10}$$

右辺の $P(V) = -F_V$ は均一状態の圧力であり、固定した外圧 P と停留点で一致する。さらに

$$A''(V) = F_{VV} = -\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{T,N}. \tag{11}$$

局所安定な熱平衡は $A'' > 0$ の極小なので $\partial P/\partial V < 0$。$A'' < 0$ の極大は不安定である。$A'' = 0$ では二階微分だけで安定性を判定できず、この等温線で安定枝が終わる点は限界点となる。図 1 では左右の等しい最小値が同じ Gibbs 自由エネルギーを持つ共存状態、中央の極大が不安定状態である。



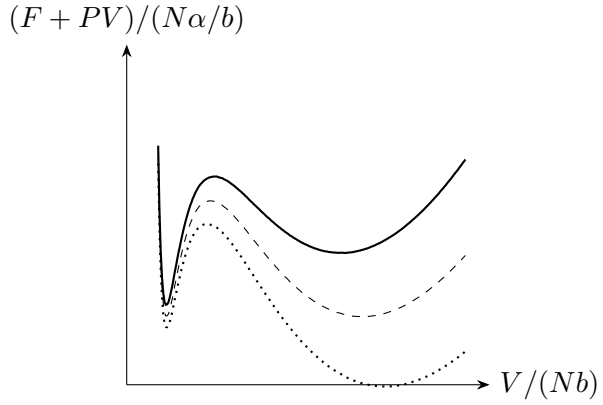
図では $k_B T b/\alpha = 1/4$ の例を用いた。共存圧力は $P_{\rm coex} b^2/\alpha \simeq 0.01808161$ であり、二つの極小の高さが等しくなるように求めた。自由エネルギー図の縦軸は、体積によらない項と共存時の極小値を差し引いて示した。

[6] 圧力による傾きの変化

圧力を $P + \delta P$ に変えると

$$A_{P+\delta P}(V) = A_P(V) + \delta P\, V. \tag{12}$$

したがって $\delta P > 0$ では大体積側ほど自由エネルギーが余分に上がり、小体積側の極小がより低くなる。圧力を下げると逆に大体積側の極小が選ばれる。これは外圧を上げると圧縮が進み、外圧を下げると膨張・気化が進むことに対応する。



破線は共存圧力、実線は圧力増加、点線は圧力減少を表す。圧力変化は $\delta P b^2/\alpha = \pm 0.001$ とし、同じ自由エネルギーに δPV を加えて描いた。

[7] 状態方程式と平衡等温線

状態方程式 $P(V) = Nk_BT/(V-Nb) - \alpha N^2/V^2$ をこの温度で描くと、図 1 に二つの極小がある条件では S 字状の van der Waals ループを持つ。中間枝は $\partial P/\partial V > 0$ であり、均一な状態として不安定である。共存圧力 $P_{\rm coex}$ では、小体積相と大体積相の Gibbs 自由エネルギーが等しい。全 N 個の粒子がそれぞれの均一相にあるときの体積を V_l, V_g と書き、$V_l < V_g$ とする。$F(V) = F(T,N,V)$ と略記すると、二つの大域最小の高さが等しい条件は

$$F(V_g) - F(V_l) = -P_{\rm coex}(V_g - V_l) \tag{13}$$

である。

中間の全体積では、二つの相が共存し、各相に属する粒子の割合が変わる。熱力学極限で界面の自由エネルギーを無視し、各相の体積と自由エネルギーを加える。大体積相に属する粒子の割合を x（$0 \le x \le 1$）とすると、自由エネルギーの示量性から

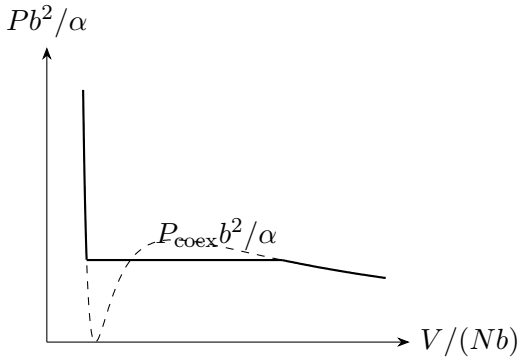
$$V = (1-x)V_l + xV_g, \tag{14}$$

$$F_{\rm mix}(V) = (1-x)F(V_l) + xF(V_g). \tag{15}$$

従ってこの混合状態の圧力は

$$-\frac{dF_{\rm mix}}{dV} = -\frac{F(V_g)-F(V_l)}{V_g - V_l} = P_{\rm coex}. \tag{16}$$

このため平衡等温線は $V_l \le V \le V_g$ で水平となる。均一状態の S 字曲線と、二相の割合が変わる平衡状態を同じ図に示す。



破線は状態方程式の全枝、実線は平衡等温線である。共存区間は一定圧力の直線で結び、区間外では実線と状態方程式が一致する。

物理工学専攻院試解答集
2015 年度物理学 II 第 3 問

政岡凜太郎

原問の時間依存を $e^{-i\omega t}$ とし、媒質は $z>0$、波の伝播方向を $+z$ とする。電場は x 方向で、複素波数 $\widetilde{k}=k_1+ik_2$ を用いて

$$\boldsymbol{E}(z,t)=\mathrm{Re}\Big[\widetilde{E}_0\,\boldsymbol{e}_x e^{i(\widetilde{k}z-\omega t)}\Big]=|\widetilde{E}_0|e^{-k_2 z}\cos(k_1 z-\omega t+\delta)\,\boldsymbol{e}_x \tag{1}$$

と書く（$\delta=\arg\widetilde{E}_0$）。媒質中で減衰する解を選ぶので $k_2>0$ である。

[1] 分散関係と位相速度

波動方程式に $e^{i(\widetilde{k}z-\omega t)}$ を代入すると

$$-\widetilde{k}^2+\epsilon\mu\omega^2+i\mu\sigma\omega=0,\qquad \boxed{\widetilde{k}^2=\epsilon\mu\omega^2+i\mu\sigma\omega}. \tag{2}$$

位相一定条件 $k_1 z-\omega t+\delta=\text{const.}$ から、位相速度は振幅減衰を決める k_2 ではなく

$$\boxed{v_{\mathrm{ph}}=\frac{\omega}{k_1}}. \tag{3}$$

[2] 振幅減衰距離

振幅は z とともに $e^{-k_2 z}$ 倍される。$e^{-k_2 d}=e^{-1}$ より

$$\boxed{d=\frac{1}{k_2}}. \tag{4}$$

これは振幅の $1/e$ 距離であり、時間平均二乗場や強度の $1/e$ 距離は $1/(2k_2)$ である。

[3] 実部・虚部

$(k_1+ik_2)^2=(k_1^2-k_2^2)+2ik_1k_2=\mu\omega(\epsilon\omega+i\sigma)$. よって $k_1^2-k_2^2=\epsilon\mu\omega^2$、$2k_1k_2=\mu\sigma\omega$。$k_1,k_2>0$ の減衰・前進波の枝を選ぶと

$$k_1=\boxed{\sqrt{\frac{\mu\omega}{2}\left(\sqrt{\epsilon^2\omega^2+\sigma^2}+\epsilon\omega\right)}}, \tag{5}$$

$$k_2=\boxed{\sqrt{\frac{\mu\omega}{2}\left(\sqrt{\epsilon^2\omega^2+\sigma^2}-\epsilon\omega\right)}}. \tag{6}$$

[4] 伝導率による減衰距離

$$d = \sqrt{\frac{2}{\mu\omega\left(\sqrt{\epsilon^2\omega^2+\sigma^2}-\epsilon\omega\right)}}. \tag{7}$$

高伝導率 $\sigma \gg \epsilon\omega$ では平方根の内側の根号を σ と近似できるため

$$\boxed{d \simeq \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} \propto \sigma^{-1/2}}. \tag{8}$$

低伝導率 $\sigma \ll \epsilon\omega$ では $\sqrt{\epsilon^2\omega^2+\sigma^2}-\epsilon\omega \simeq \sigma^2/(2\epsilon\omega)$ なので

$$\boxed{d \simeq \frac{2}{\sigma}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \propto \sigma^{-1}}. \tag{9}$$

[5] 電場・磁場の位相差

Faraday 則から複素振幅は

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}(z) = \frac{\widetilde{k}}{\omega}\boldsymbol{e}_z \times \widetilde{\boldsymbol{E}}(z) = \frac{\widetilde{k}}{\omega}\widetilde{E}_0\boldsymbol{e}_y e^{i\widetilde{k}z}. \tag{10}$$

位相 $\Theta = k_1 z - \omega t + \delta$ と書くと、実電場は $E_x \propto \cos\Theta$、実磁束密度は $B_y \propto \cos(\Theta+\phi)$ である。同じ山に注目すれば磁束密度の山は電場より ϕ/ω だけ遅い時刻に現れる。従って磁束密度は電場に対して $\widetilde{k}$ の偏角だけ遅れ、

$$\boxed{\phi = \arg(k_1+ik_2) = \tan^{-1}\left(\frac{k_2}{k_1}\right)}, \qquad 0<\phi<\frac{\pi}{2}. \tag{11}$$

高伝導率極限では $k_1/k_2 \to 1$ より $\boxed{\phi \to \pi/4}$。低伝導率極限では $k_2/k_1 \to 0$ より $\boxed{\phi \to 0}$。

[6] 平均ポインティング流束

$z=0$ で $\widetilde{\boldsymbol{B}}_0 = (\widetilde{k}/\omega)\widetilde{E}_0\boldsymbol{e}_y$ である。実場の時間平均を複素振幅で計算すると

$$\langle \boldsymbol{S}\rangle = \frac{1}{2\mu}\,\mathrm{Re}\left(\widetilde{\boldsymbol{E}}_0 \times \widetilde{\boldsymbol{B}}_0^{\,*}\right) = \frac{|\widetilde{E}_0|^2}{2\mu\omega}\,\mathrm{Re}(\widetilde{k}^{\,*})\boldsymbol{e}_z \tag{12}$$

$$= \frac{|\widetilde{E}_0|^2 k_1}{2\mu\omega}\boldsymbol{e}_z. \tag{13}$$

従って

$$\boxed{|\langle \boldsymbol{S}\rangle| = \frac{|\widetilde{E}_0|^2 k_1}{2\mu\omega} = \frac{|\widetilde{E}_0|^2}{2}\sqrt{\frac{\epsilon}{2\mu}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}}+1\right)}}. \tag{14}$$

流束は媒質内へ向かう $+z$ 方向である。

[7] 媒質に及ぼす単位体積あたりの仕事率

電磁場が電荷にする仕事率密度は電流密度との内積である。オーム則を用いれば

$$\boxed{Q(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) = \sigma|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)|^2 \geq 0}. \tag{15}$$

電場は x 方向なのでここでの絶対値二乗は実場の成分の二乗を表す。

[8] Joule 熱と侵入エネルギー

媒質中の電場振幅が $|\widetilde{E}_0|e^{-k_2 z}$ であるから

$$\langle Q(z,t)\rangle = \frac{\sigma}{2}|\widetilde{E}_0|^2 e^{-2k_2 z}. \tag{16}$$

従って単位界面面積あたり、単位時間に媒質内で消費される平均仕事は

$$\int_0^{+\infty}\langle Q(z,t)\rangle dz = \frac{\sigma|\widetilde{E}_0|^2}{4k_2} = \frac{|\widetilde{E}_0|^2 k_1}{2\mu\omega} = |\langle \boldsymbol{S}(0)\rangle|, \tag{17}$$

ここで $2k_1k_2 = \mu\sigma\omega$ を用いた。媒質の奥では流束がゼロに減衰するため、境界から流入した平均電磁エネルギーは全て媒質内の Joule 熱に変わる。

物理工学専攻院試解答集
2015 年度物理学 II 第 4 問

政岡凜太郎

[1] 逆格子と第一ブリュアン域

逆格子の定義は $\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{b}_j = 2\pi\delta_{ij}$ である。$\boldsymbol{b}_1 = (u, v)$ とすると

$$\frac{\sqrt{3}a}{2}u + \frac{a}{2}v = 2\pi, \qquad -\frac{\sqrt{3}a}{2}u + \frac{a}{2}v = 0.$$

和と差から $v = 2\pi/a$, $u = 2\pi/(\sqrt{3}a)$ を得る。同様に

$$\boxed{\boldsymbol{b}_1 = 2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}a}, \frac{1}{a}\right), \qquad \boldsymbol{b}_2 = 2\pi\left(-\frac{1}{\sqrt{3}a}, \frac{1}{a}\right).} \tag{1}$$

第一ブリュアン域は、原点と最短の逆格子点との垂直二等分線に囲まれた領域である。最短の 6 点は $\pm\boldsymbol{b}_1, \pm\boldsymbol{b}_2, \pm(\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2)$。各境界は $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{G} = |\boldsymbol{G}|^2/2$ を満たす。$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2$ の境界は $k_x = 2\pi/(\sqrt{3}a)$。$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ の境界の交点は $k_x = 0$, $k_y = 4\pi/(3a)$ なので

$$\boxed{P = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}a}, 0\right), \qquad Q = \left(0, \frac{4\pi}{3a}\right).} \tag{2}$$

得られる領域は図の正六角形である。図中の O は波数原点を表す。

[2] スピンを含めた自由電子の状態数

単位胞の面積を s、系全体の面積を S とすると

$$s = |\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2| = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2, \qquad \text{電子数} = \frac{2S}{s}.$$

波数空間で単位面積あたりの状態数は $S/(2\pi)^2$。スピン 2 重を含めて円内の状態を数えると

$$2\frac{S}{(2\pi)^2}\pi k_F^2 = \frac{2S}{s}, \qquad \boxed{k_F = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{8\pi}{\sqrt{3}}}.} \tag{3}$$

[3] フェルミ面と第一域の関係

円の面積は $\pi k_F^2 = (2\pi)^2/s$ で、第一ブリュアン域の面積に等しい。ただし形は円と六角形で異なる。六角形の内接半径 r_{in} と外接半径 r_{out} は

$$r_{\text{in}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}a}, \qquad r_{\text{out}} = \frac{4\pi}{3a}, \qquad r_{\text{in}} < k_F < r_{\text{out}}.$$

したがってフェルミ面は各辺を横切るが、六角形の頂点には届かない。自由電子のフェルミ面は第一域の外にも続く円である。

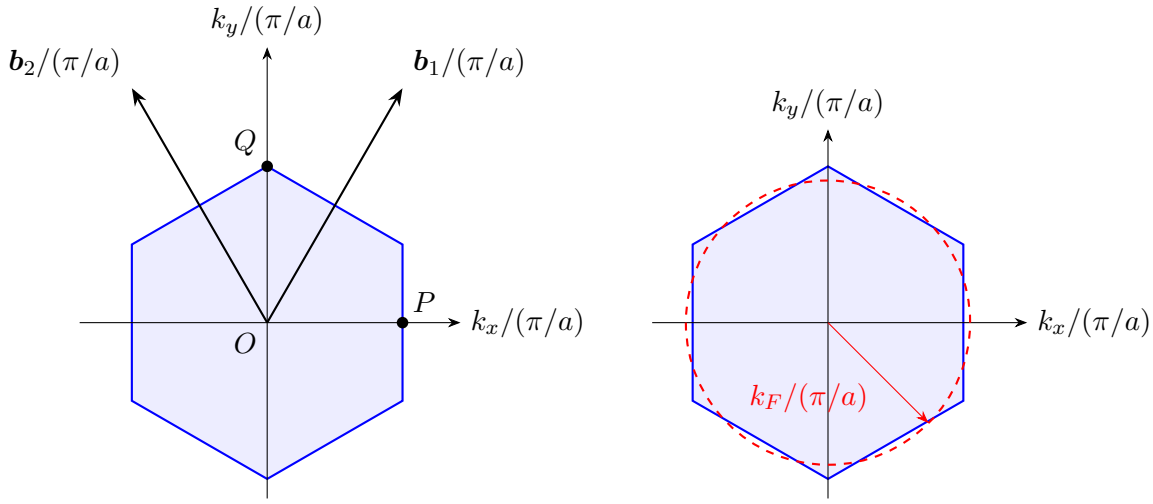


図 1: 左: 逆格子と第一域。座標の単位は π/a。右: 同じ縮尺の第一域（青線）と自由電子のフェルミ面（赤破線）。

[4] 原子軌道への射影

原問の図 2 の配置に従って、A から最近接 B への変位を

$$\boldsymbol{\delta}_1 = \frac{\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2}{3}, \quad \boldsymbol{\delta}_2 = \frac{\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2}{3}, \quad \boldsymbol{\delta}_3 = \frac{-2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2}{3} \tag{4}$$

と選ぶ。どれも長さ $a/\sqrt{3}$ である。最近接位相の和を

$$f(\boldsymbol{k}) = \sum_{j=1}^{3} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\delta}_j}$$

と定義する。以下 $\lambda^A = \lambda^A_{\boldsymbol{k}}$, $\lambda^B = \lambda^B_{\boldsymbol{k}}$ と略記する。A 軌道への固有方程式の射影は、規格化積分と最近接行列要素だけを残して

$$\int \phi_A(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i^A)\mathcal{H}\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i^A}[\epsilon_A\lambda^A + \tau f(\boldsymbol{k})\lambda^B], \tag{5}$$

$$E(\boldsymbol{k})\int \phi_A(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i^A)\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i^A}E(\boldsymbol{k})\lambda^A. \tag{6}$$

B から A への最近接変位は $-\boldsymbol{\delta}_j$ なので、B への射影には f^* が現れる。共通の位相を除くと

$$\boxed{\begin{pmatrix} \epsilon_A & \tau f(\boldsymbol{k}) \\ \tau f(\boldsymbol{k})^* & \epsilon_B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda^A \\ \lambda^B \end{pmatrix} = E(\boldsymbol{k})\begin{pmatrix} \lambda^A \\ \lambda^B \end{pmatrix}.} \tag{7}$$

これは係数に対する固有値方程式である。

[5] 二本のエネルギー帯

行列式がゼロになる条件は

$$(E - \epsilon_A)(E - \epsilon_B) - \tau^2|f(\boldsymbol{k})|^2 = 0.$$

したがって上帯を E_+、下帯を E_- とすると

$$\boxed{E_\pm(\boldsymbol{k}) = \frac{\epsilon_A + \epsilon_B}{2} \pm \sqrt{\frac{(\epsilon_A - \epsilon_B)^2}{4} + \tau^2|f(\boldsymbol{k})|^2}.} \tag{8}$$

位相の和の絶対値の二乗は

$$|f|^2 = 3 + 2\sum_{i<j} \cos[\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{\delta}_i - \boldsymbol{\delta}_j)] \tag{9}$$

$$= 3 + 4\cos\left(\frac{\sqrt{3}ak_x}{2}\right)\cos\left(\frac{ak_y}{2}\right) + 2\cos(ak_y). \tag{10}$$

よってこの最後の式を代入すれば k_x, k_y の明示的な関数になる。

[6] 占有状態と最小ギャップ

各エネルギー帯は単位胞あたりスピン込みで 2 個の電子を収容する。電子が単位胞あたり 2 個なら下帯は満たされ、上帯は空である。$f = 0$ で下帯が最大、上帯が最小となる。$k_x = 0$ では

$$|f|^2 = 1 + 4\cos\left(\frac{ak_y}{2}\right) + 4\cos^2\left(\frac{ak_y}{2}\right) = \left[1 + 2\cos\left(\frac{ak_y}{2}\right)\right]^2.$$

ゼロになるのは $\cos(ak_y/2) = -1/2$。第一域にある点は

$$\boxed{X = \left(0, \pm\frac{4\pi}{3a}\right), \qquad E_1 = \epsilon_B, \quad E_2 = \epsilon_A, \quad E_g = \epsilon_A - \epsilon_B.} \tag{11}$$

これらは図の上・下の頂点に当たる。以下では $X = (0, 4\pi/(3a))$ を選ぶ。

[7] X 近傍の曲率と有効質量

$k_y = 4\pi/(3a) + q$ とおき、$|aq| \ll 1$ で展開すると

$$1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{aq}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}a}{2}q + O(q^2).$$

$E_g > 0$ なので平方根を展開できる。原問の $E_g \gg |\tau|$ の範囲では

$$E_+(q) = \epsilon_A + \frac{3a^2\tau^2}{4E_g}q^2 + O(q^3), \tag{12}$$

$$E_-(q) = \epsilon_B - \frac{3a^2\tau^2}{4E_g}q^2 + O(q^3). \tag{13}$$

電子の有効質量を $1/m^* = (1/\hbar^2)\,\partial^2 E/\partial k_y^2$ で定義すると

$$\boxed{m_+^* = \frac{2\hbar^2 E_g}{3a^2\tau^2}, \qquad m_-^* = -\frac{2\hbar^2 E_g}{3a^2\tau^2}.} \tag{14}$$

上帯は極小なので正、下帯は極大なので負である。下帯のホールを用いる場合は、電子の符号付き曲率質量とは別に $m_{\mathrm{hole}}^* = |m_-^*|$ となる。

[8] すべて同じ原子にした場合

$\epsilon_B = \epsilon_A$ とするとギャップは消え、$k_x = 0$ で

$$E_{\pm}(k_y) = \epsilon_A \pm |\tau| \left| 1 + 2\cos\left(\frac{ak_y}{2}\right) \right|.$$

よって X 近傍では

$$\boxed{E_{\pm}(q) = \epsilon_A \pm \frac{\sqrt{3}a|\tau|}{2}|q| + O(q^2), \qquad E_g = 0.} \tag{15}$$

上下のエネルギーを大小で並べると $|q|$ を含む直線的な交差になる。[7] の放物的な有効質量の式を、ギャップが消える場合にそのまま用いることはできない。