物理工学専攻院試解答集
2015 年度物理学 II 第 3 問

政岡凜太郎

原問の時間依存を $e^{-i\omega t}$ とし、媒質は $z>0$、波の伝播方向を $+z$ とする。電場は x 方向で、複素波数 $\widetilde{k}=k_1+ik_2$ を用いて

$$\boldsymbol{E}(z,t)=\mathrm{Re}\Big[\widetilde{E}_0\,\boldsymbol{e}_x e^{i(\widetilde{k}z-\omega t)}\Big]=|\widetilde{E}_0|e^{-k_2 z}\cos(k_1 z-\omega t+\delta)\,\boldsymbol{e}_x \tag{1}$$

と書く（$\delta=\arg\widetilde{E}_0$）。媒質中で減衰する解を選ぶので $k_2>0$ である。

[1] 分散関係と位相速度

波動方程式に $e^{i(\widetilde{k}z-\omega t)}$ を代入すると

$$-\widetilde{k}^2+\epsilon\mu\omega^2+i\mu\sigma\omega=0,\qquad \boxed{\widetilde{k}^2=\epsilon\mu\omega^2+i\mu\sigma\omega}. \tag{2}$$

位相一定条件 $k_1 z-\omega t+\delta=\text{const.}$ から、位相速度は振幅減衰を決める k_2 ではなく

$$\boxed{v_{\mathrm{ph}}=\frac{\omega}{k_1}}. \tag{3}$$

[2] 振幅減衰距離

振幅は z とともに $e^{-k_2 z}$ 倍される。$e^{-k_2 d}=e^{-1}$ より

$$\boxed{d=\frac{1}{k_2}}. \tag{4}$$

これは振幅の $1/e$ 距離であり、時間平均二乗場や強度の $1/e$ 距離は $1/(2k_2)$ である。

[3] 実部・虚部

$(k_1+ik_2)^2=(k_1^2-k_2^2)+2ik_1k_2=\mu\omega(\epsilon\omega+i\sigma)$. よって $k_1^2-k_2^2=\epsilon\mu\omega^2$、$2k_1k_2=\mu\sigma\omega$。$k_1,k_2>0$ の減衰・前進波の枝を選ぶと

$$k_1=\boxed{\sqrt{\frac{\mu\omega}{2}\left(\sqrt{\epsilon^2\omega^2+\sigma^2}+\epsilon\omega\right)}}, \tag{5}$$

$$k_2=\boxed{\sqrt{\frac{\mu\omega}{2}\left(\sqrt{\epsilon^2\omega^2+\sigma^2}-\epsilon\omega\right)}}. \tag{6}$$

[4] 伝導率による減衰距離

$$d = \sqrt{\frac{2}{\mu\omega\left(\sqrt{\epsilon^2\omega^2+\sigma^2}-\epsilon\omega\right)}}. \tag{7}$$

高伝導率 $\sigma \gg \epsilon\omega$ では平方根の内側の根号を σ と近似できるため

$$\boxed{d \simeq \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} \propto \sigma^{-1/2}}. \tag{8}$$

低伝導率 $\sigma \ll \epsilon\omega$ では $\sqrt{\epsilon^2\omega^2+\sigma^2}-\epsilon\omega \simeq \sigma^2/(2\epsilon\omega)$ なので

$$\boxed{d \simeq \frac{2}{\sigma}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \propto \sigma^{-1}}. \tag{9}$$

[5] 電場・磁場の位相差

Faraday 則から複素振幅は

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}(z) = \frac{\widetilde{k}}{\omega}\boldsymbol{e}_z \times \widetilde{\boldsymbol{E}}(z) = \frac{\widetilde{k}}{\omega}\widetilde{E}_0\boldsymbol{e}_y e^{i\widetilde{k}z}. \tag{10}$$

位相 $\Theta = k_1 z - \omega t + \delta$ と書くと、実電場は $E_x \propto \cos\Theta$、実磁束密度は $B_y \propto \cos(\Theta+\phi)$ である。同じ山に注目すれば磁束密度の山は電場より ϕ/ω だけ遅い時刻に現れる。従って磁束密度は電場に対して $\widetilde{k}$ の偏角だけ遅れ、

$$\boxed{\phi = \arg(k_1+ik_2) = \tan^{-1}\left(\frac{k_2}{k_1}\right)}, \qquad 0<\phi<\frac{\pi}{2}. \tag{11}$$

高伝導率極限では $k_1/k_2 \to 1$ より $\boxed{\phi \to \pi/4}$。低伝導率極限では $k_2/k_1 \to 0$ より $\boxed{\phi \to 0}$。

[6] 平均ポインティング流束

$z=0$ で $\widetilde{\boldsymbol{B}}_0 = (\widetilde{k}/\omega)\widetilde{E}_0\boldsymbol{e}_y$ である。実場の時間平均を複素振幅で計算すると

$$\langle \boldsymbol{S}\rangle = \frac{1}{2\mu}\,\mathrm{Re}\left(\widetilde{\boldsymbol{E}}_0 \times \widetilde{\boldsymbol{B}}_0^{\,*}\right) = \frac{|\widetilde{E}_0|^2}{2\mu\omega}\,\mathrm{Re}(\widetilde{k}^{\,*})\boldsymbol{e}_z \tag{12}$$

$$= \frac{|\widetilde{E}_0|^2 k_1}{2\mu\omega}\boldsymbol{e}_z. \tag{13}$$

従って

$$\boxed{|\langle \boldsymbol{S}\rangle| = \frac{|\widetilde{E}_0|^2 k_1}{2\mu\omega} = \frac{|\widetilde{E}_0|^2}{2}\sqrt{\frac{\epsilon}{2\mu}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}}+1\right)}}. \tag{14}$$

流束は媒質内へ向かう $+z$ 方向である。

[7] 媒質に及ぼす単位体積あたりの仕事率

電磁場が電荷にする仕事率密度は電流密度との内積である。オーム則を用いれば

$$\boxed{Q(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) = \sigma|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)|^2 \geq 0}. \tag{15}$$

電場は x 方向なのでここでの絶対値二乗は実場の成分の二乗を表す。

[8] Joule 熱と侵入エネルギー

媒質中の電場振幅が $|\widetilde{E}_0|e^{-k_2 z}$ であるから

$$\langle Q(z,t)\rangle = \frac{\sigma}{2}|\widetilde{E}_0|^2 e^{-2k_2 z}. \tag{16}$$

従って単位界面面積あたり、単位時間に媒質内で消費される平均仕事は

$$\int_0^{+\infty}\langle Q(z,t)\rangle dz = \frac{\sigma|\widetilde{E}_0|^2}{4k_2} = \frac{|\widetilde{E}_0|^2 k_1}{2\mu\omega} = |\langle \boldsymbol{S}(0)\rangle|, \tag{17}$$

ここで $2k_1k_2 = \mu\sigma\omega$ を用いた。媒質の奥では流束がゼロに減衰するため、境界から流入した平均電磁エネルギーは全て媒質内の Joule 熱に変わる。