物理工学専攻院試解答集
2015 年度物理学 I 第 2 問

政岡凜太郎

[1] 無限直線電荷

線電荷から距離 r の同軸円筒をガウス面に選ぶ。長さ l の円筒面を貫く電束は $2\pi rlE(r)$ で、内部電荷は λl だから

$$\boldsymbol{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,\boldsymbol{e}_r, \qquad E(r) = \frac{|\lambda|}{2\pi\varepsilon_0 r}. \tag{1}$$

r_0 を基準に $E_r = -d\phi/dr$ を積分すると

$$\phi(r) - \phi(r_0) = -\int_{r_0}^{r} E_r(r')\,dr' = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{r_0}. \tag{2}$$

よって $\phi(r_0) = 0$ とすれば、原問の式を得る。

[2] 平行な二本の線電荷

点 $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ から $(a,0),(b,0)$ までの距離をそれぞれ r_a, r_b とすると

$$r_a^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta, \qquad r_b^2 = b^2 + r^2 - 2br\cos\theta. \tag{3}$$

[1] のポテンシャルを重ね合わせて

$$\boxed{\phi(r,\theta) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_b}{r_a} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b^2 + r^2 - 2br\cos\theta}{a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta}.} \tag{4}$$

[3] 鏡像電荷と境界条件

線電荷 $+\lambda$ を $(d,0)$、鏡像線電荷 $-\lambda$ を $(D,0)$ に置くと、全ポテンシャルは

$$\phi(r,\theta) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{D^2 + r^2 - 2Dr\cos\theta}{d^2 + r^2 - 2dr\cos\theta}. \tag{5}$$

$r = R$ でこの比が θ に依存しないためには、分子・分母の $\cos\theta$ 係数で割った定数項が等しくなければならない。従って

$$\frac{D^2 + R^2}{2DR} = \frac{d^2 + R^2}{2dR}, \qquad (D-d)(dD - R^2) = 0. \tag{6}$$

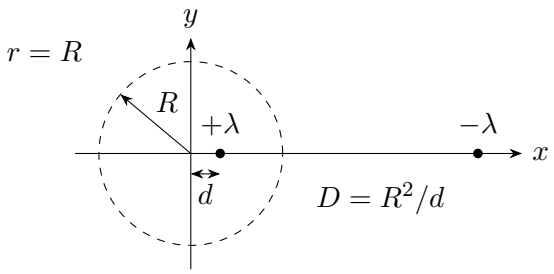
像電荷は空洞外にあるので $D > R > d$、従って

$$\boxed{D = \frac{R^2}{d}}. \tag{7}$$

この鏡像電荷対だけのポテンシャルは $r = R$ で $\lambda \ln(R/d)/(2\pi\varepsilon_0)$ となる。接地条件 $\phi(R,\theta) = 0$ を満たすため、この定数を引く。$D = R^2/d$ を代入してまとめると、空洞内 $(r < R)$ のポテンシャルは

$$\boxed{\phi(r,\theta) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left[\frac{d^2 r^2/R^2 + R^2 - 2dr\cos\theta}{d^2 + r^2 - 2dr\cos\theta}\right].} \tag{8}$$

$r = R$ では分子と分母が等しく、対数の中身が 1 となるため、接地条件を満たす。加えた定数は電場および誘導面電荷密度には影響しない。



[4] 誘導面電荷密度

境界では原問の法線規約により $\sigma(\theta) = \varepsilon_0 \partial_r \phi|_{r=R}$ である。上のポテンシャルを微分し、$D = R^2/d$ を代入すると

$$\sigma(\theta) = \frac{\lambda}{4\pi}\left[\frac{2d^2/R - 2d\cos\theta}{d^2 + R^2 - 2dR\cos\theta} - \frac{2R - 2d\cos\theta}{d^2 + R^2 - 2dR\cos\theta}\right] \tag{9}$$

$$= \boxed{-\frac{\lambda(R^2 - d^2)}{2\pi R(R^2 + d^2 - 2Rd\cos\theta)}}. \tag{10}$$

正の線電荷に対して誘起面電荷は全周で負であり、最も近い $\theta = 0$ 側で絶対値が最大となる。

[5] 誘起電荷の全量

$a = d/R < 1$ と置くと

$$\sigma(\theta) = -\frac{\lambda}{2\pi R}\frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos\theta + a^2} = -\frac{\lambda}{2\pi R}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos n\theta\right). \tag{11}$$

各余弦の一周積分は 0 なので、円筒内側面の単位長さ当たり電荷は

$$\boxed{R\int_0^{2\pi} \sigma(\theta)\, d\theta = -\lambda}. \tag{12}$$

[6] 面密度測定から位置を求める

線電荷の角度が ψ の場合、[4] の式は

$$\sigma(\theta) = -\frac{\lambda}{2\pi R}\left[1 + 2\frac{d}{R}\cos(\theta - \psi)\right] + O\big((d/R)^2\big) \tag{13}$$

となる。以下の対向点の和・差と位置の復元も d/R の一次までであり、対向点で和と差を取れば定数項と反対称な成分を分離できる。

$$\sigma_1 - \sigma_3 = -\frac{2\lambda d}{\pi R^2}\cos\psi, \qquad \sigma_1 + \sigma_3 = -\frac{\lambda}{\pi R}, \tag{14}$$

$$\sigma_2 - \sigma_4 = -\frac{2\lambda d}{\pi R^2}\sin\psi, \qquad \sigma_2 + \sigma_4 = -\frac{\lambda}{\pi R}. \tag{15}$$

従って、$x_0 = d\cos\psi$, $y_0 = d\sin\psi$ より

$$\boxed{x_0 = \frac{R}{2}\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3}, \qquad y_0 = \frac{R}{2}\frac{\sigma_2 - \sigma_4}{\sigma_2 + \sigma_4}.} \tag{16}$$