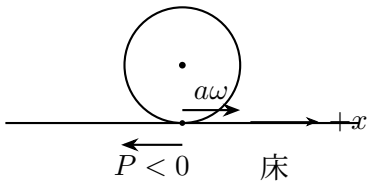
物理工学専攻院試解答集
2015 年度物理学 I 第 1 問

政岡凜太郎

図の $+x$ 方向を右向きとし、$\omega > 0$ は球底面の点が球中心に対して $+x$ 方向へ動く回転とする。球に働く床からの水平力積は符号付きで $P < 0$ である。



[1] 慣性モーメント

球の一様密度は $\rho = 3m/(4\pi a^3)$ である。回転軸から距離 $r\sin\theta$ にある体積要素を積分すると

$$I = \rho \int_0^a r^4\,dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin^3\theta\,d\theta \tag{1}$$

$$= \frac{3m}{4\pi a^3} \cdot \frac{a^5}{5} \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} = \boxed{\frac{2}{5}ma^2}. \tag{2}$$

[2] 衝突直後の滑りなし条件

接触点の速度は、球中心の並進速度 v' と回転による速度 $a\omega'$ の和である。この符号規約では

$$\boxed{v' + a\omega' = 0}. \tag{3}$$

[3] 1 回の衝突

衝突前の水平方向速度は 0 である。床から球への力積が P なので、水平運動量の式は

$$mv' = P. \tag{4}$$

球底面に働く左向き力積は正回転を弱める。球中心まわりの角運動量変化は

$$I(\omega' - \omega) = aP. \tag{5}$$

$P = mv'$ と $v' = -a\omega'$ を代入し、$I = 2ma^2/5$ を使うと

$$\frac{2}{5}ma^2(\omega' - \omega) = -ma^2\omega', \tag{6}$$

$$\boxed{\omega' = \frac{2}{7}\omega}, \qquad \boxed{v' = -\frac{2}{7}a\omega}. \tag{7}$$

[4] 反跳ごとの保存量

n 回目の衝突について、床からの水平力積を符号付きで P_n とすると

$$m(v_n - v_{n-1}) = P_n, \qquad I(\omega_n - \omega_{n-1}) = aP_n. \tag{8}$$

ここで $l_n = I\omega_n - amv_n$ と置く。従って

$$l_n - l_{n-1} = I(\omega_n - \omega_{n-1}) - am(v_n - v_{n-1}) \tag{9}$$

$$= aP_n - aP_n = 0. \tag{10}$$

よって

$$\boxed{l = I\omega_n - amv_n \quad \text{は反跳回数} n \text{ によらず一定.}} \tag{11}$$

[5] 最終的な転がり速度

反跳が終わると接触点速度が 0 なので $v_F = -a\omega_F$ である。従って保存量は

$$l = I\omega_F - amv_F = -\left(\frac{I}{a} + am\right) v_F = -\frac{7}{5}mav_F, \tag{12}$$

最後の等号では $I = 2ma^2/5$ を使った。従って

$$\boxed{v_F = -\frac{5l}{7ma}}. \tag{13}$$

初期値 $l = I\omega_0 - amv_0$ と等置すると

$$\boxed{v_F = \frac{5}{7}v_0 - \frac{2}{7}a\omega_0}. \tag{14}$$

したがって反跳終了時に並進しない条件は

$$\boxed{v_F = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v_0 = \frac{2}{5}a\omega_0}. \tag{15}$$