# 物理工学専攻院試解答集
# 2014 年度物理学 I 第 1 問

政岡凜太郎

## [1] 重心運動と相対運動

全質量を $M = m_1 + m_2$ とすると、定義から

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{R} - \frac{m_2}{M}\boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R} + \frac{m_1}{M}\boldsymbol{r}. \tag{1}$$

従って運動エネルギーは

$$\frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2^2 = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{\boldsymbol{R}} - \frac{m_2}{M}\dot{\boldsymbol{r}}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\boldsymbol{R}} + \frac{m_1}{M}\dot{\boldsymbol{r}}\right)^2 \tag{2}$$

$$= \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{M}\dot{\boldsymbol{r}}^2. \tag{3}$$

交差項 $\dot{\boldsymbol{R}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}$ の係数は $-m_1m_2/M + m_2m_1/M = 0$ なので相殺する。よって

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\boldsymbol{r}}^2 - U(\boldsymbol{r}), \qquad M = m_1 + m_2, \quad \mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}.} \tag{4}$$

重心座標と相対座標の運動は独立に分離された。

以下では $U = U(r)$ とし、相対運動だけを考える。

## [2] 極座標でのラグランジアン

平面極座標 $\boldsymbol{r} = (r\cos\phi, r\sin\phi, 0)$ の速度の大きさの二乗は

$$\dot{\boldsymbol{r}}^{\,2} = \dot{r}^{\,2} + r^2\dot{\phi}^{\,2}. \tag{5}$$

従って

$$\boxed{L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^{\,2} + r^2\dot{\phi}^{\,2}) - U(r).} \tag{6}$$

## [3] 角運動量と有効ポテンシャル

$L$ は $\phi$ に陽に依存しないので $\phi$ は循環座標である。Euler–Lagrange 方程式より

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = \frac{d}{dt}(\mu r^2\dot{\phi}) = 0, \qquad \boxed{l = \mu r^2\dot{\phi} = \text{一定}.} \tag{7}$$

$r$ に関する方程式は

$$\mu\ddot{r} = \mu r\dot{\phi}^{\,2} - \frac{dU}{dr} = \frac{l^2}{\mu r^3} - \frac{dU}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}\right). \tag{8}$$

したがって半径方向の運動は、有効ポテンシャル

$$U_{\rm eff}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2} \tag{9}$$

中の一次元運動と同じである。$l \neq 0$ のとき第二項は角運動量による遠心障壁と呼ばれ、半径方向の運動方程式に外向きの力 $l^2/(\mu r^3)$ を加える。

## [4] エネルギー保存

半径方向の運動方程式に $\dot{r}$ を掛けると

$$\mu \dot{r}\ddot{r} = -\frac{dU_{\rm eff}}{dr}\dot{r} = -\frac{dU_{\rm eff}}{dt}. \tag{10}$$

よって

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^{\,2} + U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2} = \text{一定}.} \tag{11}$$

## [5] Laplace–Runge–Lenz ベクトル

$U(r) = -k/r$（$k > 0$）の運動方程式は $\ddot{\boldsymbol{r}} = -k\hat{\boldsymbol{r}}/(\mu r^2)$、ただし $\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}/r$ である。角運動量 $\boldsymbol{l} = \mu \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}$ は一定。原本で与えられたベクトルを

$$\boldsymbol{A} = \mu \dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{l} - \mu k \hat{\boldsymbol{r}} \tag{12}$$

と書く。

$$\dot{\boldsymbol{A}} = \mu \ddot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{l} - \mu k \dot{\hat{\boldsymbol{r}}} \tag{13}$$

$$= -\frac{k}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{l} - \mu k \dot{\hat{\boldsymbol{r}}} = 0, \tag{14}$$

ここでは、$\dot{r} = \hat{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}$ として

$$\hat{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{l} = \mu \hat{\boldsymbol{r}} \times (\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}) = \mu r(\dot{r}\hat{\boldsymbol{r}} - \dot{\boldsymbol{r}}) = -\mu r^2 \dot{\hat{\boldsymbol{r}}} \tag{15}$$

を用いた。最後の等号は $\dot{\hat{\boldsymbol{r}}} = (\dot{\boldsymbol{r}} - \dot{r}\hat{\boldsymbol{r}})/r$ による。したがって $\boldsymbol{A}$ も保存する。

ベクトル積 $\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{l}$ と $\boldsymbol{r}$ はともに $\boldsymbol{l}$ と垂直なので

$$\boxed{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{l} = 0.} \tag{16}$$

またスカラー三重積を使うと

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{r} = \mu(\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{l}) \cdot \boldsymbol{r} - \mu k r \tag{17}$$

$$= \mu \boldsymbol{l} \cdot (\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}) - \mu k r = l^2 - \mu k r. \tag{18}$$

$A = |\boldsymbol{A}|$ とする。$l \neq 0$、$A \neq 0$ の場合には、$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{r}$ のなす角 $\alpha$ を使って $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{r} = Ar\cos\alpha$ と等置し、

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{l^2}\left(1 + \frac{A}{\mu k}\cos\alpha\right), \qquad A = |\boldsymbol{A}|.} \tag{19}$$

を得る。これは焦点を中心力の中心に持つ円錐曲線の極座標表示である。

$A = 0$ の円軌道では $\alpha$ は定義できないが、上の内積恒等式から直接 $r = l^2/(\mu k)$ が得られる。一方、$l = 0$ の直線軌道では $l^2$ で除算できないため、この軌道式を使わず、半径方向の運動方程式 $\mu \ddot{r} = -k/r^2$（$r > 0$）で扱う。

# 物理工学専攻院試解答集
# 2014 年度物理学 I 第 2 問

政岡凜太郎

以下、真空中を考える。

## [1] 電流が作る磁場

### [1.1] 円環電流

円環の各電流要素から軸上の点までの距離は $\sqrt{a^2+z^2}$ である。対称性により横成分は相殺し、軸成分だけが加わる。Biot–Savart 則から

$$B_z(0,0,z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2\,d\theta}{(a^2+z^2)^{3/2}} = \boxed{\frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}}. \tag{1}$$

図 1 の電流方向へ右手の指を曲げると、親指が $+z$ を向く。

### [1.2] 有限長ソレノイドの中心磁場

巻数が長さ方向に一様に分布するとし、単位長さあたりの巻数を $n = N/l$ とする。軸方向位置 $z'$ にある幅 $dz'$ の巻線は $n\,dz'$ 回の円電流に相当する。その中心への寄与を [1.1] に重ねると

$$B_z(0) = \frac{\mu_0 n I a^2}{2}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{dz'}{(a^2+z'^2)^{3/2}} \tag{2}$$

$$= \frac{\mu_0 N I}{2\sqrt{a^2+(l/2)^2}} = \boxed{\frac{\mu_0 N I}{\sqrt{l^2+4a^2}}}. \tag{3}$$

中心磁場はソレノイド軸方向である。有限長の結果であり、$l \gg a$ の極限では $B_z(0) \simeq \mu_0 N I/l$ となる。

### [1.3] 自己インダクタンス

自己インダクタンスの計算では $l \gg a$ とし、内部磁場を一様とみなす。各巻線を貫く磁束は

$$\Phi = B\pi a^2 \simeq \frac{\mu_0 N I}{l}\pi a^2. \tag{4}$$

全磁束鎖交数は $N\Phi = LI$ だから

$$\boxed{L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 \pi a^2}{l}.} \tag{5}$$

## [2] 交流コンデンサー間の電磁場

極板間隔 $d \ll b$ として端効果を無視し、極板半径が交流の波長に比べて十分小さい準静的近似を用いる。その条件は $\omega_0 b\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} \ll 1$ であり、電磁波の伝播に伴う電場の空間変化を無視する。極板間の電場を $+z$ 方向に正として選ぶと

$$\boldsymbol{E}(t) = \frac{v_0}{d}\sin(\omega_0 t)\,\boldsymbol{e}_z. \tag{6}$$

端効果を無視し、半径 $r < b$ の円周を囲む積分路に Maxwell–Ampère 則を適用する。電束は $\pi r^2 E_z$ なので

$$2\pi r B_\phi = \mu_0\varepsilon_0 \frac{d}{dt}(\pi r^2 E_z), \qquad \boxed{\boldsymbol{B}(r,t) = \frac{\mu_0\varepsilon_0\omega_0 v_0 r}{2d}\cos(\omega_0 t)\,\boldsymbol{e}_\phi.} \tag{7}$$

$\cos(\omega_0 t) > 0$ のとき $\boldsymbol{B}$ は $+z$ 軸から見て反時計回り、$\cos(\omega_0 t) < 0$ では時計回りである。電場の時間変化に対する右ねじの向きであり、$\cos = 0$ では磁場は瞬間的にゼロとなる。

## [3] LC 回路

### [3.1] 電流の時間変化

最初にコンデンサーに蓄えられた電荷を $q(0) = CV$ とする。$i$ の正方向をコンデンサーが放電するときの向きに取れば $i = -\dot{q}$ で、初期電流は $i(0) = 0$ である。回路の電圧則は

$$\frac{q}{C} = L\frac{di}{dt} = -L\frac{d^2 q}{dt^2}, \qquad \ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0. \tag{8}$$

角振動数 $\omega = 1/\sqrt{LC}$ の解は

$$\boxed{q(t) = CV\cos(\omega t), \qquad i(t) = -\dot{q} = CV\omega\sin(\omega t).} \tag{9}$$

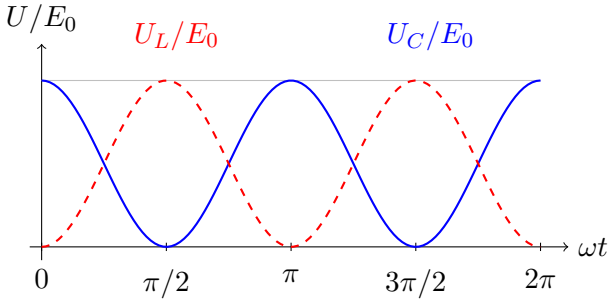
電流は最初ゼロから増え、コンデンサーが空になる $t = \pi/(2\omega)$ で最大となる。

### [3.2] 電場・磁場エネルギー

コンデンサーとソレノイドのエネルギーは

$$U_C(t) = \frac{q^2}{2C} = E_0\cos^2(\omega t), \qquad U_L(t) = \frac{1}{2}Li^2 = E_0\sin^2(\omega t), \qquad E_0 = \frac{1}{2}CV^2. \tag{10}$$

したがって $U_C + U_L = E_0$ は一定である。$t = 0$ では全エネルギーが電場にあり、$t = \pi/(2\omega)$ では磁場に移り、$t = \pi/\omega$ では再び電場に戻る。この交換が繰り返される。横軸を $\omega t$、縦軸を $U/E_0$ とした同一図に示す。



### [3.3] 極板間隔を $2d$ にした場合

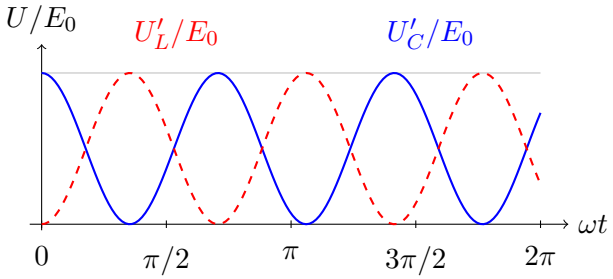
スイッチをつなぐ前に極板を引き離す間、漏れがないため電荷 $Q = CV$ は一定である。平行板容量が $C' = C/2$ となり、電圧は $V' = Q/C' = 2V$ に上がる。従って接続直後の全エネルギーと固有角振動数は

$$U_0' = \frac{Q^2}{2C'} = CV^2 = 2E_0, \qquad \omega' = \frac{1}{\sqrt{LC'}} = \sqrt{2}\,\omega. \tag{11}$$

以後 $q(0) = Q$, $i(0) = 0$ なので

$$U_C'(t) = 2E_0 \cos^2(\sqrt{2}\omega t), \qquad U_L'(t) = 2E_0 \sin^2(\sqrt{2}\omega t). \tag{12}$$

同じ規格化 $U/E_0$ と横軸 $\omega t$ で描くと、エネルギー振幅が 2 倍、振動数が $\sqrt{2}$ 倍になる。




極板間隔を増すには、極板間の引力に逆らって外力が仕事をする必要がある。理想的な容量モデルで損失を無視し、極板を静止させた前後の状態を比べると、外力の仕事は電気エネルギーの増加 $U_0' - E_0 = Q^2/(2C') - Q^2/(2C) = E_0$ に等しい。接続後はその増えた全エネルギーがコンデンサーとソレノイドの間を移る。

# 物理工学専攻院試解答集
# 2014 年度物理学 II 第 1 問

政岡凜太郎

## [1] Pauli 行列の固有状態

$|\alpha\rangle = (1,0)^T$, $|\beta\rangle = (0,1)^T$ を $\sigma_z$ の固有値 $+1, -1$ の状態とする。行列の作用を直接計算すると

$$\sigma_x \frac{|\alpha\rangle + |\beta\rangle}{\sqrt{2}} = +\frac{|\alpha\rangle + |\beta\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad \sigma_x \frac{|\alpha\rangle - |\beta\rangle}{\sqrt{2}} = -\frac{|\alpha\rangle - |\beta\rangle}{\sqrt{2}}, \tag{1}$$

$$\sigma_y \frac{|\alpha\rangle + i|\beta\rangle}{\sqrt{2}} = +\frac{|\alpha\rangle + i|\beta\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad \sigma_y \frac{|\alpha\rangle - i|\beta\rangle}{\sqrt{2}} = -\frac{|\alpha\rangle - i|\beta\rangle}{\sqrt{2}}. \tag{2}$$

したがって $|\pm x\rangle = (|\alpha\rangle \pm |\beta\rangle)/\sqrt{2}$、$|\pm y\rangle = (|\alpha\rangle \pm i|\beta\rangle)/\sqrt{2}$ がそれぞれ固有値 $\pm 1$ の規格化固有状態である。

## [2] 電場中の一次元運動

### [2.1] ハミルトニアン

$\boldsymbol{p} = p_x \boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{e}_z$ なので $\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E} = -p_x E \boldsymbol{e}_y$。従って

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + H_{\mathrm{SO}} = \boxed{\frac{p_x^2}{2m} - \frac{\gamma E}{\hbar} p_x \sigma_y}. \tag{3}$$

### [2.2] 分散とスピン

平面波 $\phi_k(x) = e^{ikx}$ では $p_x = \hbar k$ だから

$$H(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \gamma E k \sigma_y. \tag{4}$$

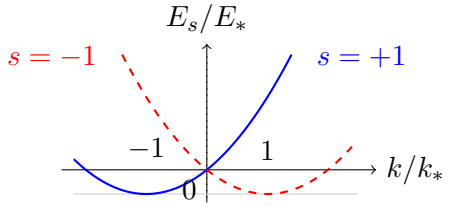
$\sigma_y$ 固有値を $s = \pm 1$ とし、$|y, +1\rangle = |+y\rangle$、$|y, -1\rangle = |-y\rangle$ と書くと、固有関数と固有エネルギーは

$$\psi_{k,s}(x) = e^{ikx}|y, s\rangle, \tag{5}$$

$$E_s(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - s\gamma E k = \frac{\hbar^2}{2m}\left(k - \frac{sm\gamma E}{\hbar^2}\right)^2 - \frac{m\gamma^2 E^2}{2\hbar^2}. \tag{6}$$

二本は $k = 0$ で交差する放物線で、それぞれの固有枝ではスピンは一定の $s\boldsymbol{e}_y$ を向く。$\gamma < 0$ のため、各 $k \neq 0$ で低い方の枝は $s = \mathrm{sgn}(\gamma k) = -\mathrm{sgn}(k)$ である。つまり最低エネルギー状態を $k < 0$ から $k > 0$ へ移るとスピンは $+y$ から $-y$ へ反転する。交差点 $k = 0$ では縮退しており、スピン方向は一意に定まらない。

$k_* = |m\gamma E|/\hbar^2$、$E_* = m\gamma^2 E^2/(2\hbar^2)$、$x = k/k_*$ と置けば $E_s/E_* = x^2 + 2sx$ である。分散を図示する。




青実線と赤破線は $\sigma_y$ の固有値 $+1,-1$ に対応する。放物線の頂点はそれぞれ $k/k_*=-1,+1$ にあり、エネルギーは $-E_*$ である。

### [2.3] Zeeman 場を加えた場合

$\Delta=g\mu_B B/2>0$ とおくと、Zeeman 項を含む運動量表示ハミルトニアンは

$$H(k)=\frac{\hbar^2k^2}{2m}+\Delta\sigma_x-\gamma Ek\sigma_y=\frac{\hbar^2k^2}{2m}+\boldsymbol{h}(k)\cdot\boldsymbol{\sigma},\qquad \boldsymbol{h}(k)=(\Delta,-\gamma Ek,0). \tag{7}$$

Pauli 行列の反交換関係から $(\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2=|\boldsymbol{h}|^2 I$ となり、$\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ の固有値は $\pm|\boldsymbol{h}|$ である。従って

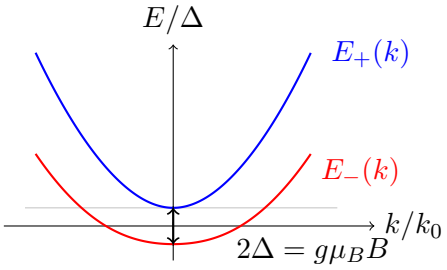
$$\boxed{E_\pm(k)=\frac{\hbar^2k^2}{2m}\pm\sqrt{\Delta^2+(\gamma Ek)^2}}. \tag{8}$$

$k=0$ の準位差は $2\Delta=g\mu_B B$ で、電場のみの交差が有限の間隔を持つ反交差となる。その規格化固有状態で $\{\sigma_j,\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{\sigma}\}=2h_jI$ の期待値を取ると、$2(\pm|\boldsymbol{h}|)\langle\sigma_j\rangle_\pm=2h_j$（$j=x,y,z$）である。従ってスピン期待値は

$$\boxed{\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle_\pm=\pm\frac{(\Delta,-\gamma Ek,0)}{\sqrt{\Delta^2+(\gamma Ek)^2}}}. \tag{9}$$

よって $k=0$ では上枝が $+x$、下枝が $-x$ を向く。$\gamma<0$ なら $h_y=-\gamma Ek$ は $k$ と同じ符号を持つ。$|k|$ が大きくなるにつれて、上枝のスピンは有効場 $\boldsymbol{h}(k)$ と平行、下枝のスピンは反平行のまま連続的に回る。十分大きな正の $k$ では上枝が $+y$、負の $k$ では上枝が $-y$ に近づき、下枝は反対向きとなる。

固有エネルギーの概略は次のようになる。$q=k/k_0$, $k_0=\Delta/(|\gamma|E)$ とし、二次項の無次元係数 $c=\hbar^2k_0^2/(2m\Delta)$ を表示例として $c=1$ に選ぶ。したがって曲線は $E_\pm/\Delta=q^2\pm\sqrt{1+q^2}$ で、$q=0$ のギャップは $2\Delta=g\mu_B B$ である。曲率は $c$ に依存する。



# 物理工学専攻院試解答集
# 2014 年度物理学 II 第 2 問

政岡凜太郎

## [1] 速度空間でのミクロカノニカル分布

$N = 2$ の全運動エネルギーは

$$E = \frac{m}{2}(v_{x,1}^2 + v_{y,1}^2 + v_{x,2}^2 + v_{y,2}^2). \tag{1}$$

したがって 4 成分を座標とする速度空間では、許される点は原点中心、半径

$$\boxed{R = \sqrt{\frac{2E}{m}}} \tag{2}$$

の 3 次元球面上にある。ミクロカノニカル分布では、等しい微小エネルギー幅の殻に含まれる位相空間体積を等重みに数える。速度球面の面積要素を $dS$、半径方向の厚さを $dR$ とすると、殻の体積は $dS\,dR$ である。$E = mR^2/2$ を微分すれば

$$dE = mR\,dR, \qquad dS\,dR = \frac{dS\,dE}{mR}. \tag{3}$$

同じ球面上では $mR$ が一定なので、固定したエネルギー幅に対する重みは $dS$ に比例する。位置積分は速度方向に依存しない共通因子となり、ミクロカノニカル分布はこの球面に一様である。

## [2] $d$ 次元球面の表面積

半径 $r$ の球面を、最初の $d-1$ 座標 $q_1, \ldots, q_{d-1}$ で表すと

$$q_d = \pm\sqrt{r^2 - q_1^2 - \cdots - q_{d-1}^2}. \tag{4}$$

各半球の面積要素はグラフ面積の公式から

$$dS = \sqrt{1 + \sum_{j=1}^{d-1}\left(\frac{\partial q_d}{\partial q_j}\right)^2}\, dq_1 \cdots dq_{d-1} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - \sum_{j=1}^{d-1} q_j^2}}\, dq_1 \cdots dq_{d-1}. \tag{5}$$

上下二つの半球を足し、各変数が残りの半径以内を動く積分にすると、問題文の式が得られる。たとえば

$$S_2(r) = \int_{-r}^{r} dq_1\, \frac{2r}{\sqrt{r^2 - q_1^2}}, \tag{6}$$

$$S_3(r) = \int_{-r}^{r} dq_1 \int_{-\sqrt{r^2-q_1^2}}^{\sqrt{r^2-q_1^2}} dq_2\, \frac{2r}{\sqrt{r^2 - q_1^2 - q_2^2}}, \tag{7}$$

$$S_4(r) = \int_{-r}^{r} dq_1 \int_{-\sqrt{r^2-q_1^2}}^{\sqrt{r^2-q_1^2}} dq_2 \int_{-\sqrt{r^2-q_1^2-q_2^2}}^{\sqrt{r^2-q_1^2-q_2^2}} dq_3\, \frac{2r}{\sqrt{r^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}}. \tag{8}$$

同じ構成を $d-1$ 重積分へ拡張できる。

## [3] $N = 2$ の粒子 1 の速さ

速度ベクトル $\boldsymbol{v}_1$ が平面内で速さ $v_1$ と角度 $\theta$ を持つとする。エネルギー一定面上で粒子 2 の速さは

$$s = |\boldsymbol{v}_2| = \sqrt{R^2 - v_1^2}. \tag{9}$$

各 $\boldsymbol{v}_1$ に対し、残る 2 成分 $(v_{x,2}, v_{y,2})$ は半径 $s$ の円周上を動く。エネルギーのデルタ関数を用いてその寄与を書くと

$$P(v_1)\,dv_1 \propto \underbrace{2\pi v_1\,dv_1}_{\boldsymbol{v}_1 \text{ の円環面積}} \int_{\mathbb{R}^2} d^2v_2\,\delta\Big(E - \frac{m}{2}(v_1^2 + v_2^2)\Big) \tag{10}$$

$$\propto 2\pi v_1\,dv_1\,\frac{S_2(s)}{ms}. \tag{11}$$

$0 < v_1 < R$ で粒子 2 の速さを積分変数 $u$ とすると、デルタ関数の引数が 0 となるのは $u = s$ で、その微分の絶対値は $ms$ である。したがって上の殻積分は

$$\int_0^\infty 2\pi u\,du\,\delta\Big(E - \frac{m}{2}(v_1^2 + u^2)\Big) = \frac{2\pi s}{ms} = \frac{S_2(s)}{ms} = \frac{2\pi}{m}. \tag{12}$$

ここで $S_2(s) = 2\pi s$ は円周長であり、この殻積分は $v_1$ に依存しない。したがって速さの確率密度は

$$\boxed{P(v_1) \propto v_1 \quad (0 < v_1 < R), \qquad P(v_1) = 0 \quad (v_1 > R).} \tag{13}$$

半径 $v_1$ の円環面積に比例するため、平面速度ベクトルの密度と速さの密度は異なる。

## [4] 一般の $N$ に対する速さ分布

全エネルギー $E = N\epsilon$ のとき、$2N$ 次元速度球面の半径は

$$R = \sqrt{\frac{2N\epsilon}{m}}. \tag{14}$$

粒子 1 の二成分を固定すると、残る $2N-2$ 成分の速度空間は半径 $s = \sqrt{R^2 - v_1^2}$ の球面上にある。前問と同じエネルギー殻積分から

$$P(v_1)\,dv_1 \propto 2\pi v_1\,dv_1\,\frac{S_{2N-2}(s)}{ms}. \tag{15}$$

$d$ 次元球面の表面積は半径の $d-1$ 乗に比例するので $S_{2N-2}(s) \propto s^{2N-3}$。従って

$$\boxed{P(v_1) \propto v_1\left(\frac{2N\epsilon}{m} - v_1^2\right)^{N-2}, \qquad 0 < v_1 < \sqrt{\frac{2N\epsilon}{m}}.} \tag{16}$$

それより大きい速さでは $P(v_1) = 0$ である。

## [5] Maxwell 速さ分布への極限

$v_1$ を固定して $N \to \infty$ とする。$v_1$ に依らない係数を比例定数へまとめると

$$P(v_1) \propto v_1\left(1 - \frac{mv_1^2}{2N\epsilon}\right)^{N-2} \tag{17}$$

$$\longrightarrow v_1 \exp\left(-\frac{mv_1^2}{2\epsilon}\right). \tag{18}$$

これは二次元での Maxwell 速さ分布であり、先頭の $v_1$ は二次元の円環面積要素に由来する。

## [6] 温度

温度 $T$ の二次元 Maxwell 速さ分布は $P(v_1) \propto v_1 \exp[-mv_1^2/(2k_BT)]$ である。指数を [5] と比べると

$$\boxed{T = \frac{\epsilon}{k_B}.} \tag{19}$$

これは各粒子に二つの並進自由度があり、平均運動エネルギーが $2(k_BT/2) = k_BT$ であることとも一致する。

# 物理工学専攻院試解答集
# 2014 年度物理学 II 第 3 問

政岡凜太郎

## [1] 電束密度

球の全電荷は $Q = 4\pi a^2\sigma$ である。Gauss 則を半径 $r > a$ の球面に適用すると

$$\boxed{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \sigma\frac{a^2}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}, \qquad D(r,t) = |\sigma|\left(\frac{a}{r}\right)^2.} \tag{1}$$

ここでは球中心を原点とする瞬間座標を用いた。

## [2] 移動電荷の磁場

速度が $c$ より十分小さいとき、動く微小電荷 $dq$ による磁場は $d\boldsymbol{H} = (dq/4\pi)\,\boldsymbol{v}\times\hat{\boldsymbol{R}}/R^2$ である。電束密度への寄与は $d\boldsymbol{D} = (dq/4\pi)\hat{\boldsymbol{R}}/R^2$ なので、重ね合わせれば球外で

$$\boxed{\boldsymbol{H} = \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{D}.} \tag{2}$$

移動する場は $\partial_t\boldsymbol{D} = -(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{D}$ を満たし、外部では $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D} = 0$ である。一定ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{D}) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D}) - (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{D} = \partial_t\boldsymbol{D}$ となり、Maxwell–Ampère 則とも整合する。

## [3] 円 C に沿う積分

$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_x$ とし、$\theta$ を $\boldsymbol{r}$ と $+x$ 軸のなす角とする。球面座標の方位方向を $\boldsymbol{e}_\phi$ とすると

$$\boldsymbol{H} = H_\phi\boldsymbol{e}_\phi, \qquad H_\phi = \frac{\sigma a^2 v\sin\theta}{r^2}. \tag{3}$$

円 C の半径は $d = r\sin\theta$ で、$\boldsymbol{H}$ は円周に接する。周回方向を $\boldsymbol{e}_\phi$ とする。積分面 $S$ は、瞬間的な球中心を中心とする半径 $r > a$ の球面上で、極角 $0 \le \vartheta \le \theta$ の球冠とし、法線を外向きに選ぶ。その境界は円 C であり、正の周回方向は $\boldsymbol{e}_\phi$ となる。この面は球殻を横切らないので

$$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{\ell} = 2\pi d H_\phi \tag{4}$$

$$= \int_S \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S} = \boxed{\frac{2\pi\sigma a^2 v\sin^2\theta}{r}}. \tag{5}$$

円周積分と面積分を結ぶ等号は Maxwell–Ampère 則の積分形である。$S$ 上には伝導電流がなく、変位電流だけが寄与する。

## [4] 円 C を縁とする面を貫く電束の変化

基準時刻に [3] の球冠面 $S$ を選び、その後は実験室に固定して電束の時間変化を求める。球冠面上では $\boldsymbol{D} = \sigma a^2 \boldsymbol{e}_r / r^2$ なので、基準時刻の電束は

$$\Psi = \int_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = \sigma a^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\theta} \sin\vartheta \, d\vartheta = 2\pi\sigma a^2 (1 - \cos\theta). \tag{6}$$

微分するときに球冠面を球と一緒に動かしてはならない。実験室に固定した点では球中心からの位置が $\partial_t \boldsymbol{r} = -v\boldsymbol{e}_x$ と変わる。その長さの時間微分は $\partial_t r = \boldsymbol{e}_r \cdot \partial_t \boldsymbol{r} = -v\cos\vartheta$ である。$\boldsymbol{D} = \sigma a^2 \boldsymbol{r}/r^3$ に積の微分を適用すると

$$\partial_t \boldsymbol{D} = \sigma a^2 \left( \frac{\partial_t \boldsymbol{r}}{r^3} - \frac{3\boldsymbol{r}}{r^4} \partial_t r \right) \tag{7}$$

$$= \frac{\sigma a^2 v}{r^3} \left( 3\cos\vartheta \, \boldsymbol{e}_r - \boldsymbol{e}_x \right), \tag{8}$$

$$\partial_t \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{e}_r = \frac{2\sigma a^2 v \cos\vartheta}{r^3}. \tag{9}$$

従って、固定面を貫く電束の時間変化は

$$\frac{d\Psi}{dt} = \int_S \partial_t \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{10}$$

$$= \frac{2\sigma a^2 v}{r^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\theta} r^2 \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta = \frac{2\pi\sigma a^2 v \sin^2\theta}{r}. \tag{11}$$

よって $\Delta t$ の一次までで

$$\boxed{\Delta\Psi = \frac{2\pi\sigma a^2 v \sin^2\theta}{r} \Delta t = \frac{2\pi\sigma a^2 v \sin^3\theta}{d} \Delta t.} \tag{12}$$

この面の選び方なら、$r > a$ の全ての極角で導出できる。円 C の平面円板を選ぶと球殻を横切る場合があり、その場合は伝導電流も含める必要がある。軸上の $\theta = 0, \pi$ では円が縮み、上の値は 0 となる。

## [5] 磁場の大きさ

[3] の円周積分を $2\pi d$ で割るか、[4] の電束変化率を使う。ここで割り算は円が縮まない $0 < \theta < \pi$ で行い、軸上は連続極限で評価すると

$$\boxed{H(r,t) = \frac{|\Delta\Psi|}{2\pi d \Delta t} = \frac{|\sigma| a^2 v \sin\theta}{r^2}.} \tag{13}$$

磁場は $\sigma > 0$ なら $+\boldsymbol{e}_\phi$、$\sigma < 0$ なら $-\boldsymbol{e}_\phi$ を向く。軸上では上式の極限が $H = 0$ を与える。

## [6] 磁気エネルギー密度

真空中では $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$ なので

$$\boxed{u(\boldsymbol{r},t) = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2}\mu_0 H^2 = \frac{1}{2}\mu_0 \sigma^2 a^4 v^2 \frac{\sin^2\theta}{r^4}.} \tag{14}$$

## [7] 球外の磁気エネルギー

球外 $r > a$ の全空間で積分する。体積要素は $r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$ なので

$$U_{\mathrm{mag}} = \frac{1}{2}\mu_0 \sigma^2 a^4 v^2 \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin^3\theta \, d\theta \tag{15}$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0 \sigma^2 a^4 v^2 \left(\frac{1}{a}\right)(2\pi)\left(\frac{4}{3}\right) = \boxed{\frac{4\pi}{3}\mu_0 \sigma^2 a^3 v^2}. \tag{16}$$

## [8] 運動に伴う全エネルギー

磁気エネルギーを運動エネルギーに加えると

$$\boxed{E_{\mathrm{tot}} = \frac{1}{2}m_0 v^2 + U_{\mathrm{mag}} = \frac{1}{2}\left(m_0 + \frac{8\pi}{3}\mu_0 \sigma^2 a^3\right) v^2.} \tag{17}$$

したがって、この近似で運動に伴う有効質量は $m_{\mathrm{eff}} = m_0 + 8\pi\mu_0\sigma^2 a^3/3$ と書ける。

球が動くと電束密度の時間変化が磁場を作り、その磁場はエネルギーを持つ。この磁気エネルギーは速さの二乗に比例するので、運動エネルギーへ加えると質量の増加分として表せる。外力は物質の球だけでなく、運動に伴う磁場も作る仕事をする。ここで扱うのは運動に伴うエネルギーであり、電気的自己エネルギーは含めない。

# 物理工学専攻院試解答集
# 2014 年度物理学 II 第 4 問

政岡凜太郎

## [1] 低周波の状態密度

$d$ 次元の波数空間で、半径 $k$ の球（円）に含まれる状態数は体積に比例し、$N(k) \propto k^d$ である。線形分散 $\omega = vk$ から $k = \omega/v$ なので

$$D(\omega) = \frac{dN}{d\omega} \propto \omega^{d-1}. \tag{1}$$

従って 3 次元立方格子では $p = 2$、2 次元正方格子では $p = 1$ である。

## [2] 低温比熱

低周波の状態密度を $D(\omega) = A\omega^p$ と書く。Debye 近似では、このべき則を有限個のモード数に合う上限角周波数 $\omega_D$ まで延長する。この近似での内部エネルギーは

$$U = \int_0^{\omega_D} d\omega\, D(\omega) \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/(k_B T)} - 1}. \tag{2}$$

十分低温では寄与する周波数は $k_B T/\hbar \ll \omega_D$ であり、上限を無限大まで延ばせる。$x = \hbar\omega/(k_B T)$ と置換すると

$$U \propto T^{p+2} \int_0^{\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x - 1}\, dx, \qquad C_V = \frac{dU}{dT} \propto T^{p+1}. \tag{3}$$

よって 3 次元では $q = 3$、2 次元では $q = 2$ となる。

## [3] 層状系の伝搬方向

図 3(i) の帯域幅は $\omega_a$、(ii) は $\omega_b$ であり、$\omega_a \ll \omega_b$ である。面内では結合が強いため復元力と音速が大きく、面内方向の分散は広い帯域を持つ。従って (ii) が面内、分散の狭い (i) が弱く結合した面間方向である。

## [4] 等エネルギー面

面内波数を $k_\parallel = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$、面間波数を $k_z$ とする。両方向で線形分散が成り立つ $\omega_0 \ll \omega_a$ では、長波長の音響分散は

$$\omega^2 \simeq v_\parallel^2 k_\parallel^2 + v_\perp^2 k_z^2. \tag{4}$$

従って $\omega = \omega_0$ 面は

$$v_\parallel^2 (k_x^2 + k_y^2) + v_\perp^2 k_z^2 = \omega_0^2, \tag{5}$$

すなわち異方的な楕円体である。

$\omega_a \ll \omega_0 \ll \omega_b$ では、面内分散は線形の範囲にある。弱い面間方向の分散は $k_z$ に依存するが、その $\omega^2$ への寄与を $f(k_z)$ と書けば、通常の弱結合近似では $0 \le f(k_z) \lesssim \omega_a^2 \ll \omega_0^2$ である。したがって主項では

$$v_\parallel^2(k_x^2 + k_y^2) = \omega_0^2 - f(k_z) \simeq \omega_0^2. \tag{6}$$

面内波数の大きさは $k_\parallel \simeq \omega_0/v_\parallel$ でほぼ一定となり、等エネルギー面は $k_z$ 方向に第一ブリルアン領域全体へ延びる円筒面に近い。

## [5] 層状系の状態密度

低周波では楕円体の体積が $\omega^3$ に比例する。状態数 $N(\omega) \propto \omega^3$ を微分すれば

$$D(\omega) \propto \omega^2, \qquad r = 2 \quad (\omega \ll \omega_a). \tag{7}$$

中間域の円筒では、面間方向の波数幅はほぼ一定で、囲まれる状態数は面内円の面積に比例する。主項の半径は $k_\parallel \simeq \omega/v_\parallel$ なので、$\omega \gg \omega_a$ では $N(\omega) \propto \omega^2$、従って

$$D(\omega) \propto \omega, \qquad r = 1 \quad (\omega_a \ll \omega \ll \omega_b). \tag{8}$$

## [6] 層状系の比熱

熱的に寄与する周波数域全体で状態密度を $D(\omega) \propto \omega^r$ と近似できる場合、比熱積分で $x = \hbar\omega/(k_B T)$ と置けば

$$C_V \propto T^{r+1} \int_0^\infty dx\, x^{r+2} \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}. \tag{9}$$

この積分は温度によらない。$k_B T \ll \hbar\omega_a$ では熱的周波数域が低周波の $D(\omega) \propto \omega^2$ に収まるので $s = 3$ となる。

中間温度 $\hbar\omega_a \ll k_B T \ll \hbar\omega_b$ では、$D(\omega) \propto \omega$ が成り立つ領域の寄与は主項として

$$C_{V,\mathrm{mid}} \propto T^2 \int_{\hbar\omega_a/(k_B T)}^{\hbar\omega_b/(k_B T)} dx\, x^3 \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} \tag{10}$$

である。下端を 0 へ延ばす相対誤差は、被積分関数が $x \to 0$ で $x$ に近づくため $O((\hbar\omega_a/k_B T)^2)$ となる。ただし実際の低周波モードをこの延長で置き換えたわけではない。[4] の非負で有界な面間寄与をもつ分散では、$\omega \lesssim \omega_a$ の状態数は面内半径 $\omega_a/v_\parallel$ の円筒内の状態数以下であり、熱的半径 $k_B T/(\hbar v_\parallel)$ の状態数に比べて $O((\hbar\omega_a/k_B T)^2)$ である。低周波の各モードの比熱は高々 $k_B$ なので、この部分も主項には影響しない。上端側は熱的占有の指数因子で抑えられる。従って面内線形分散が熱的周波数域で有効なこの温度範囲では $C_V \propto T^2$、すなわち $s = 2$ である。$\hbar\omega_b \ll k_B T$ では全フォノンモードが古典極限に入り、各モードの比熱は温度によらず一定なので $s = 0$ となる。