物理工学専攻院試解答集
2014 年度物理学 II 第 3 問

政岡凜太郎

[1] 電束密度

球の全電荷は $Q = 4\pi a^2\sigma$ である。Gauss 則を半径 $r > a$ の球面に適用すると

$$\boxed{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \sigma\frac{a^2}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}, \qquad D(r,t) = |\sigma|\left(\frac{a}{r}\right)^2.} \tag{1}$$

ここでは球中心を原点とする瞬間座標を用いた。

[2] 移動電荷の磁場

速度が c より十分小さいとき、動く微小電荷 dq による磁場は $d\boldsymbol{H} = (dq/4\pi)\,\boldsymbol{v}\times\hat{\boldsymbol{R}}/R^2$ である。電束密度への寄与は $d\boldsymbol{D} = (dq/4\pi)\hat{\boldsymbol{R}}/R^2$ なので、重ね合わせれば球外で

$$\boxed{\boldsymbol{H} = \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{D}.} \tag{2}$$

移動する場は $\partial_t\boldsymbol{D} = -(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{D}$ を満たし、外部では $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D} = 0$ である。一定ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{D}) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D}) - (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{D} = \partial_t\boldsymbol{D}$ となり、Maxwell–Ampère 則とも整合する。

[3] 円 C に沿う積分

$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_x$ とし、θ を $\boldsymbol{r}$ と $+x$ 軸のなす角とする。球面座標の方位方向を $\boldsymbol{e}_\phi$ とすると

$$\boldsymbol{H} = H_\phi\boldsymbol{e}_\phi, \qquad H_\phi = \frac{\sigma a^2 v\sin\theta}{r^2}. \tag{3}$$

円 C の半径は $d = r\sin\theta$ で、$\boldsymbol{H}$ は円周に接する。周回方向を $\boldsymbol{e}_\phi$ とする。積分面 S は、瞬間的な球中心を中心とする半径 $r > a$ の球面上で、極角 $0 \le \vartheta \le \theta$ の球冠とし、法線を外向きに選ぶ。その境界は円 C であり、正の周回方向は $\boldsymbol{e}_\phi$ となる。この面は球殻を横切らないので

$$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{\ell} = 2\pi d H_\phi \tag{4}$$

$$= \int_S \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S} = \boxed{\frac{2\pi\sigma a^2 v\sin^2\theta}{r}}. \tag{5}$$

円周積分と面積分を結ぶ等号は Maxwell–Ampère 則の積分形である。S 上には伝導電流がなく、変位電流だけが寄与する。

[4] 円 C を縁とする面を貫く電束の変化

基準時刻に [3] の球冠面 S を選び、その後は実験室に固定して電束の時間変化を求める。球冠面上では $\boldsymbol{D} = \sigma a^2 \boldsymbol{e}_r / r^2$ なので、基準時刻の電束は

$$\Psi = \int_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = \sigma a^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\theta} \sin\vartheta \, d\vartheta = 2\pi\sigma a^2 (1 - \cos\theta). \tag{6}$$

微分するときに球冠面を球と一緒に動かしてはならない。実験室に固定した点では球中心からの位置が $\partial_t \boldsymbol{r} = -v\boldsymbol{e}_x$ と変わる。その長さの時間微分は $\partial_t r = \boldsymbol{e}_r \cdot \partial_t \boldsymbol{r} = -v\cos\vartheta$ である。$\boldsymbol{D} = \sigma a^2 \boldsymbol{r}/r^3$ に積の微分を適用すると

$$\partial_t \boldsymbol{D} = \sigma a^2 \left(\frac{\partial_t \boldsymbol{r}}{r^3} - \frac{3\boldsymbol{r}}{r^4} \partial_t r \right) \tag{7}$$

$$= \frac{\sigma a^2 v}{r^3} \left(3\cos\vartheta \, \boldsymbol{e}_r - \boldsymbol{e}_x \right), \tag{8}$$

$$\partial_t \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{e}_r = \frac{2\sigma a^2 v \cos\vartheta}{r^3}. \tag{9}$$

従って、固定面を貫く電束の時間変化は

$$\frac{d\Psi}{dt} = \int_S \partial_t \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{10}$$

$$= \frac{2\sigma a^2 v}{r^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\theta} r^2 \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta = \frac{2\pi\sigma a^2 v \sin^2\theta}{r}. \tag{11}$$

よって Δt の一次までで

$$\boxed{\Delta\Psi = \frac{2\pi\sigma a^2 v \sin^2\theta}{r} \Delta t = \frac{2\pi\sigma a^2 v \sin^3\theta}{d} \Delta t.} \tag{12}$$

この面の選び方なら、$r > a$ の全ての極角で導出できる。円 C の平面円板を選ぶと球殻を横切る場合があり、その場合は伝導電流も含める必要がある。軸上の $\theta = 0, \pi$ では円が縮み、上の値は 0 となる。

[5] 磁場の大きさ

[3] の円周積分を $2\pi d$ で割るか、[4] の電束変化率を使う。ここで割り算は円が縮まない $0 < \theta < \pi$ で行い、軸上は連続極限で評価すると

$$\boxed{H(r,t) = \frac{|\Delta\Psi|}{2\pi d \Delta t} = \frac{|\sigma| a^2 v \sin\theta}{r^2}.} \tag{13}$$

磁場は $\sigma > 0$ なら $+\boldsymbol{e}_\phi$、$\sigma < 0$ なら $-\boldsymbol{e}_\phi$ を向く。軸上では上式の極限が $H = 0$ を与える。

[6] 磁気エネルギー密度

真空中では $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$ なので

$$\boxed{u(\boldsymbol{r},t) = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2}\mu_0 H^2 = \frac{1}{2}\mu_0 \sigma^2 a^4 v^2 \frac{\sin^2\theta}{r^4}.} \tag{14}$$

[7] 球外の磁気エネルギー

球外 $r > a$ の全空間で積分する。体積要素は $r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$ なので

$$U_{\mathrm{mag}} = \frac{1}{2}\mu_0 \sigma^2 a^4 v^2 \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin^3\theta \, d\theta \tag{15}$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0 \sigma^2 a^4 v^2 \left(\frac{1}{a}\right)(2\pi)\left(\frac{4}{3}\right) = \boxed{\frac{4\pi}{3}\mu_0 \sigma^2 a^3 v^2}. \tag{16}$$

[8] 運動に伴う全エネルギー

磁気エネルギーを運動エネルギーに加えると

$$\boxed{E_{\mathrm{tot}} = \frac{1}{2}m_0 v^2 + U_{\mathrm{mag}} = \frac{1}{2}\left(m_0 + \frac{8\pi}{3}\mu_0 \sigma^2 a^3\right) v^2.} \tag{17}$$

したがって、この近似で運動に伴う有効質量は $m_{\mathrm{eff}} = m_0 + 8\pi\mu_0\sigma^2 a^3/3$ と書ける。

球が動くと電束密度の時間変化が磁場を作り、その磁場はエネルギーを持つ。この磁気エネルギーは速さの二乗に比例するので、運動エネルギーへ加えると質量の増加分として表せる。外力は物質の球だけでなく、運動に伴う磁場も作る仕事をする。ここで扱うのは運動に伴うエネルギーであり、電気的自己エネルギーは含めない。