物理工学専攻院試解答集
2014 年度物理学 II 第 2 問

政岡凜太郎

[1] 速度空間でのミクロカノニカル分布

$N = 2$ の全運動エネルギーは

$$E = \frac{m}{2}(v_{x,1}^2 + v_{y,1}^2 + v_{x,2}^2 + v_{y,2}^2). \tag{1}$$

したがって 4 成分を座標とする速度空間では、許される点は原点中心、半径

$$\boxed{R = \sqrt{\frac{2E}{m}}} \tag{2}$$

の 3 次元球面上にある。ミクロカノニカル分布では、等しい微小エネルギー幅の殻に含まれる位相空間体積を等重みに数える。速度球面の面積要素を dS、半径方向の厚さを dR とすると、殻の体積は $dS\,dR$ である。$E = mR^2/2$ を微分すれば

$$dE = mR\,dR, \qquad dS\,dR = \frac{dS\,dE}{mR}. \tag{3}$$

同じ球面上では mR が一定なので、固定したエネルギー幅に対する重みは dS に比例する。位置積分は速度方向に依存しない共通因子となり、ミクロカノニカル分布はこの球面に一様である。

[2] d 次元球面の表面積

半径 r の球面を、最初の $d-1$ 座標 $q_1, \ldots, q_{d-1}$ で表すと

$$q_d = \pm\sqrt{r^2 - q_1^2 - \cdots - q_{d-1}^2}. \tag{4}$$

各半球の面積要素はグラフ面積の公式から

$$dS = \sqrt{1 + \sum_{j=1}^{d-1}\left(\frac{\partial q_d}{\partial q_j}\right)^2}\, dq_1 \cdots dq_{d-1} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - \sum_{j=1}^{d-1} q_j^2}}\, dq_1 \cdots dq_{d-1}. \tag{5}$$

上下二つの半球を足し、各変数が残りの半径以内を動く積分にすると、問題文の式が得られる。たとえば

$$S_2(r) = \int_{-r}^{r} dq_1\, \frac{2r}{\sqrt{r^2 - q_1^2}}, \tag{6}$$

$$S_3(r) = \int_{-r}^{r} dq_1 \int_{-\sqrt{r^2-q_1^2}}^{\sqrt{r^2-q_1^2}} dq_2\, \frac{2r}{\sqrt{r^2 - q_1^2 - q_2^2}}, \tag{7}$$

$$S_4(r) = \int_{-r}^{r} dq_1 \int_{-\sqrt{r^2-q_1^2}}^{\sqrt{r^2-q_1^2}} dq_2 \int_{-\sqrt{r^2-q_1^2-q_2^2}}^{\sqrt{r^2-q_1^2-q_2^2}} dq_3\, \frac{2r}{\sqrt{r^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}}. \tag{8}$$

同じ構成を $d-1$ 重積分へ拡張できる。

[3] $N = 2$ の粒子 1 の速さ

速度ベクトル $\boldsymbol{v}_1$ が平面内で速さ v_1 と角度 θ を持つとする。エネルギー一定面上で粒子 2 の速さは

$$s = |\boldsymbol{v}_2| = \sqrt{R^2 - v_1^2}. \tag{9}$$

各 $\boldsymbol{v}_1$ に対し、残る 2 成分 $(v_{x,2}, v_{y,2})$ は半径 s の円周上を動く。エネルギーのデルタ関数を用いてその寄与を書くと

$$P(v_1)\,dv_1 \propto \underbrace{2\pi v_1\,dv_1}_{\boldsymbol{v}_1 \text{ の円環面積}} \int_{\mathbb{R}^2} d^2v_2\,\delta\Big(E - \frac{m}{2}(v_1^2 + v_2^2)\Big) \tag{10}$$

$$\propto 2\pi v_1\,dv_1\,\frac{S_2(s)}{ms}. \tag{11}$$

$0 < v_1 < R$ で粒子 2 の速さを積分変数 u とすると、デルタ関数の引数が 0 となるのは $u = s$ で、その微分の絶対値は ms である。したがって上の殻積分は

$$\int_0^\infty 2\pi u\,du\,\delta\Big(E - \frac{m}{2}(v_1^2 + u^2)\Big) = \frac{2\pi s}{ms} = \frac{S_2(s)}{ms} = \frac{2\pi}{m}. \tag{12}$$

ここで $S_2(s) = 2\pi s$ は円周長であり、この殻積分は v_1 に依存しない。したがって速さの確率密度は

$$\boxed{P(v_1) \propto v_1 \quad (0 < v_1 < R), \qquad P(v_1) = 0 \quad (v_1 > R).} \tag{13}$$

半径 v_1 の円環面積に比例するため、平面速度ベクトルの密度と速さの密度は異なる。

[4] 一般の N に対する速さ分布

全エネルギー $E = N\epsilon$ のとき、$2N$ 次元速度球面の半径は

$$R = \sqrt{\frac{2N\epsilon}{m}}. \tag{14}$$

粒子 1 の二成分を固定すると、残る $2N-2$ 成分の速度空間は半径 $s = \sqrt{R^2 - v_1^2}$ の球面上にある。前問と同じエネルギー殻積分から

$$P(v_1)\,dv_1 \propto 2\pi v_1\,dv_1\,\frac{S_{2N-2}(s)}{ms}. \tag{15}$$

d 次元球面の表面積は半径の $d-1$ 乗に比例するので $S_{2N-2}(s) \propto s^{2N-3}$。従って

$$\boxed{P(v_1) \propto v_1\left(\frac{2N\epsilon}{m} - v_1^2\right)^{N-2}, \qquad 0 < v_1 < \sqrt{\frac{2N\epsilon}{m}}.} \tag{16}$$

それより大きい速さでは $P(v_1) = 0$ である。

[5] Maxwell 速さ分布への極限

v_1 を固定して $N \to \infty$ とする。v_1 に依らない係数を比例定数へまとめると

$$P(v_1) \propto v_1\left(1 - \frac{mv_1^2}{2N\epsilon}\right)^{N-2} \tag{17}$$

$$\longrightarrow v_1 \exp\left(-\frac{mv_1^2}{2\epsilon}\right). \tag{18}$$

これは二次元での Maxwell 速さ分布であり、先頭の v_1 は二次元の円環面積要素に由来する。

[6] 温度

温度 T の二次元 Maxwell 速さ分布は $P(v_1) \propto v_1 \exp[-mv_1^2/(2k_BT)]$ である。指数を [5] と比べると

$$\boxed{T = \frac{\epsilon}{k_B}.} \tag{19}$$

これは各粒子に二つの並進自由度があり、平均運動エネルギーが $2(k_BT/2) = k_BT$ であることとも一致する。