物理工学専攻院試解答集
2014 年度物理学 II 第 1 問

政岡凜太郎

[1] Pauli 行列の固有状態

$|\alpha\rangle = (1,0)^T$, $|\beta\rangle = (0,1)^T$ を σ_z の固有値 $+1, -1$ の状態とする。行列の作用を直接計算すると

$$\sigma_x \frac{|\alpha\rangle + |\beta\rangle}{\sqrt{2}} = +\frac{|\alpha\rangle + |\beta\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad \sigma_x \frac{|\alpha\rangle - |\beta\rangle}{\sqrt{2}} = -\frac{|\alpha\rangle - |\beta\rangle}{\sqrt{2}}, \tag{1}$$

$$\sigma_y \frac{|\alpha\rangle + i|\beta\rangle}{\sqrt{2}} = +\frac{|\alpha\rangle + i|\beta\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad \sigma_y \frac{|\alpha\rangle - i|\beta\rangle}{\sqrt{2}} = -\frac{|\alpha\rangle - i|\beta\rangle}{\sqrt{2}}. \tag{2}$$

したがって $|\pm x\rangle = (|\alpha\rangle \pm |\beta\rangle)/\sqrt{2}$、$|\pm y\rangle = (|\alpha\rangle \pm i|\beta\rangle)/\sqrt{2}$ がそれぞれ固有値 ± 1 の規格化固有状態である。

[2] 電場中の一次元運動

[2.1] ハミルトニアン

$\boldsymbol{p} = p_x \boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{e}_z$ なので $\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E} = -p_x E \boldsymbol{e}_y$。従って

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + H_{\mathrm{SO}} = \boxed{\frac{p_x^2}{2m} - \frac{\gamma E}{\hbar} p_x \sigma_y}. \tag{3}$$

[2.2] 分散とスピン

平面波 $\phi_k(x) = e^{ikx}$ では $p_x = \hbar k$ だから

$$H(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \gamma E k \sigma_y. \tag{4}$$

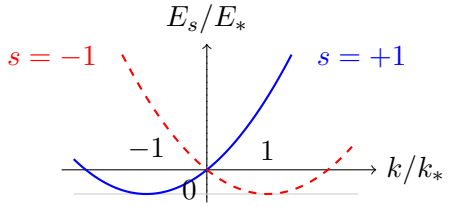
σ_y 固有値を $s = \pm 1$ とし、$|y, +1\rangle = |+y\rangle$、$|y, -1\rangle = |-y\rangle$ と書くと、固有関数と固有エネルギーは

$$\psi_{k,s}(x) = e^{ikx}|y, s\rangle, \tag{5}$$

$$E_s(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - s\gamma E k = \frac{\hbar^2}{2m}\left(k - \frac{sm\gamma E}{\hbar^2}\right)^2 - \frac{m\gamma^2 E^2}{2\hbar^2}. \tag{6}$$

二本は $k = 0$ で交差する放物線で、それぞれの固有枝ではスピンは一定の $s\boldsymbol{e}_y$ を向く。$\gamma < 0$ のため、各 $k \neq 0$ で低い方の枝は $s = \mathrm{sgn}(\gamma k) = -\mathrm{sgn}(k)$ である。つまり最低エネルギー状態を $k < 0$ から $k > 0$ へ移るとスピンは $+y$ から $-y$ へ反転する。交差点 $k = 0$ では縮退しており、スピン方向は一意に定まらない。

$k_* = |m\gamma E|/\hbar^2$、$E_* = m\gamma^2 E^2/(2\hbar^2)$、$x = k/k_*$ と置けば $E_s/E_* = x^2 + 2sx$ である。分散を図示する。



青実線と赤破線は σ_y の固有値 $+1,-1$ に対応する。放物線の頂点はそれぞれ $k/k_*=-1,+1$ にあり、エネルギーは $-E_*$ である。

[2.3] Zeeman 場を加えた場合

$\Delta=g\mu_B B/2>0$ とおくと、Zeeman 項を含む運動量表示ハミルトニアンは

$$H(k)=\frac{\hbar^2k^2}{2m}+\Delta\sigma_x-\gamma Ek\sigma_y=\frac{\hbar^2k^2}{2m}+\boldsymbol{h}(k)\cdot\boldsymbol{\sigma},\qquad \boldsymbol{h}(k)=(\Delta,-\gamma Ek,0). \tag{7}$$

Pauli 行列の反交換関係から $(\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2=|\boldsymbol{h}|^2 I$ となり、$\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ の固有値は $\pm|\boldsymbol{h}|$ である。従って

$$\boxed{E_\pm(k)=\frac{\hbar^2k^2}{2m}\pm\sqrt{\Delta^2+(\gamma Ek)^2}}. \tag{8}$$

$k=0$ の準位差は $2\Delta=g\mu_B B$ で、電場のみの交差が有限の間隔を持つ反交差となる。その規格化固有状態で $\{\sigma_j,\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{\sigma}\}=2h_jI$ の期待値を取ると、$2(\pm|\boldsymbol{h}|)\langle\sigma_j\rangle_\pm=2h_j$（$j=x,y,z$）である。従ってスピン期待値は

$$\boxed{\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle_\pm=\pm\frac{(\Delta,-\gamma Ek,0)}{\sqrt{\Delta^2+(\gamma Ek)^2}}}. \tag{9}$$

よって $k=0$ では上枝が $+x$、下枝が $-x$ を向く。$\gamma<0$ なら $h_y=-\gamma Ek$ は k と同じ符号を持つ。$|k|$ が大きくなるにつれて、上枝のスピンは有効場 $\boldsymbol{h}(k)$ と平行、下枝のスピンは反平行のまま連続的に回る。十分大きな正の k では上枝が $+y$、負の k では上枝が $-y$ に近づき、下枝は反対向きとなる。

固有エネルギーの概略は次のようになる。$q=k/k_0$, $k_0=\Delta/(|\gamma|E)$ とし、二次項の無次元係数 $c=\hbar^2k_0^2/(2m\Delta)$ を表示例として $c=1$ に選ぶ。したがって曲線は $E_\pm/\Delta=q^2\pm\sqrt{1+q^2}$ で、$q=0$ のギャップは $2\Delta=g\mu_B B$ である。曲率は c に依存する。

