物理工学専攻院試解答集
2014 年度物理学 I 第 2 問

政岡凜太郎

以下、真空中を考える。

[1] 電流が作る磁場

[1.1] 円環電流

円環の各電流要素から軸上の点までの距離は $\sqrt{a^2+z^2}$ である。対称性により横成分は相殺し、軸成分だけが加わる。Biot–Savart 則から

$$B_z(0,0,z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2\,d\theta}{(a^2+z^2)^{3/2}} = \boxed{\frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}}. \tag{1}$$

図 1 の電流方向へ右手の指を曲げると、親指が $+z$ を向く。

[1.2] 有限長ソレノイドの中心磁場

巻数が長さ方向に一様に分布するとし、単位長さあたりの巻数を $n = N/l$ とする。軸方向位置 z' にある幅 dz' の巻線は $n\,dz'$ 回の円電流に相当する。その中心への寄与を [1.1] に重ねると

$$B_z(0) = \frac{\mu_0 n I a^2}{2}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{dz'}{(a^2+z'^2)^{3/2}} \tag{2}$$

$$= \frac{\mu_0 N I}{2\sqrt{a^2+(l/2)^2}} = \boxed{\frac{\mu_0 N I}{\sqrt{l^2+4a^2}}}. \tag{3}$$

中心磁場はソレノイド軸方向である。有限長の結果であり、$l \gg a$ の極限では $B_z(0) \simeq \mu_0 N I/l$ となる。

[1.3] 自己インダクタンス

自己インダクタンスの計算では $l \gg a$ とし、内部磁場を一様とみなす。各巻線を貫く磁束は

$$\Phi = B\pi a^2 \simeq \frac{\mu_0 N I}{l}\pi a^2. \tag{4}$$

全磁束鎖交数は $N\Phi = LI$ だから

$$\boxed{L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 \pi a^2}{l}.} \tag{5}$$

[2] 交流コンデンサー間の電磁場

極板間隔 $d \ll b$ として端効果を無視し、極板半径が交流の波長に比べて十分小さい準静的近似を用いる。その条件は $\omega_0 b\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} \ll 1$ であり、電磁波の伝播に伴う電場の空間変化を無視する。極板間の電場を $+z$ 方向に正として選ぶと

$$\boldsymbol{E}(t) = \frac{v_0}{d}\sin(\omega_0 t)\,\boldsymbol{e}_z. \tag{6}$$

端効果を無視し、半径 $r < b$ の円周を囲む積分路に Maxwell–Ampère 則を適用する。電束は $\pi r^2 E_z$ なので

$$2\pi r B_\phi = \mu_0\varepsilon_0 \frac{d}{dt}(\pi r^2 E_z), \qquad \boxed{\boldsymbol{B}(r,t) = \frac{\mu_0\varepsilon_0\omega_0 v_0 r}{2d}\cos(\omega_0 t)\,\boldsymbol{e}_\phi.} \tag{7}$$

$\cos(\omega_0 t) > 0$ のとき $\boldsymbol{B}$ は $+z$ 軸から見て反時計回り、$\cos(\omega_0 t) < 0$ では時計回りである。電場の時間変化に対する右ねじの向きであり、$\cos = 0$ では磁場は瞬間的にゼロとなる。

[3] LC 回路

[3.1] 電流の時間変化

最初にコンデンサーに蓄えられた電荷を $q(0) = CV$ とする。i の正方向をコンデンサーが放電するときの向きに取れば $i = -\dot{q}$ で、初期電流は $i(0) = 0$ である。回路の電圧則は

$$\frac{q}{C} = L\frac{di}{dt} = -L\frac{d^2 q}{dt^2}, \qquad \ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0. \tag{8}$$

角振動数 $\omega = 1/\sqrt{LC}$ の解は

$$\boxed{q(t) = CV\cos(\omega t), \qquad i(t) = -\dot{q} = CV\omega\sin(\omega t).} \tag{9}$$

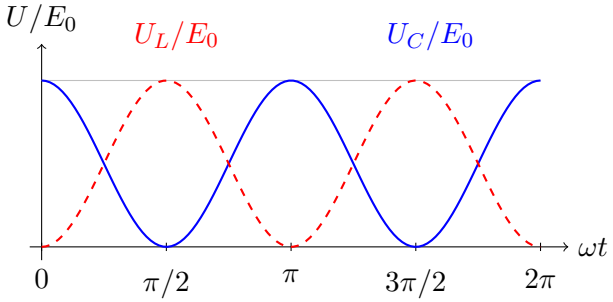
電流は最初ゼロから増え、コンデンサーが空になる $t = \pi/(2\omega)$ で最大となる。

[3.2] 電場・磁場エネルギー

コンデンサーとソレノイドのエネルギーは

$$U_C(t) = \frac{q^2}{2C} = E_0\cos^2(\omega t), \qquad U_L(t) = \frac{1}{2}Li^2 = E_0\sin^2(\omega t), \qquad E_0 = \frac{1}{2}CV^2. \tag{10}$$

したがって $U_C + U_L = E_0$ は一定である。$t = 0$ では全エネルギーが電場にあり、$t = \pi/(2\omega)$ では磁場に移り、$t = \pi/\omega$ では再び電場に戻る。この交換が繰り返される。横軸を ωt、縦軸を U/E_0 とした同一図に示す。



[3.3] 極板間隔を $2d$ にした場合

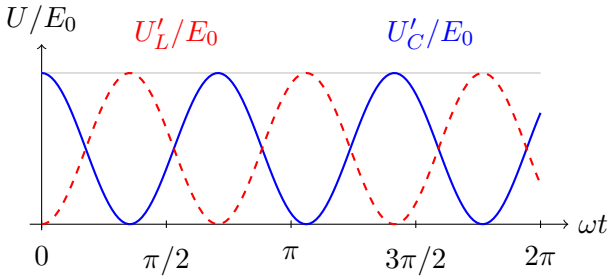
スイッチをつなぐ前に極板を引き離す間、漏れがないため電荷 $Q = CV$ は一定である。平行板容量が $C' = C/2$ となり、電圧は $V' = Q/C' = 2V$ に上がる。従って接続直後の全エネルギーと固有角振動数は

$$U_0' = \frac{Q^2}{2C'} = CV^2 = 2E_0, \qquad \omega' = \frac{1}{\sqrt{LC'}} = \sqrt{2}\,\omega. \tag{11}$$

以後 $q(0) = Q$, $i(0) = 0$ なので

$$U_C'(t) = 2E_0 \cos^2(\sqrt{2}\omega t), \qquad U_L'(t) = 2E_0 \sin^2(\sqrt{2}\omega t). \tag{12}$$

同じ規格化 U/E_0 と横軸 ωt で描くと、エネルギー振幅が 2 倍、振動数が $\sqrt{2}$ 倍になる。



極板間隔を増すには、極板間の引力に逆らって外力が仕事をする必要がある。理想的な容量モデルで損失を無視し、極板を静止させた前後の状態を比べると、外力の仕事は電気エネルギーの増加 $U_0' - E_0 = Q^2/(2C') - Q^2/(2C) = E_0$ に等しい。接続後はその増えた全エネルギーがコンデンサーとソレノイドの間を移る。