物理工学専攻院試解答集
2014 年度物理学 I 第 1 問

政岡凜太郎

[1] 重心運動と相対運動

全質量を $M = m_1 + m_2$ とすると、定義から

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{R} - \frac{m_2}{M}\boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R} + \frac{m_1}{M}\boldsymbol{r}. \tag{1}$$

従って運動エネルギーは

$$\frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2^2 = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{\boldsymbol{R}} - \frac{m_2}{M}\dot{\boldsymbol{r}}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\boldsymbol{R}} + \frac{m_1}{M}\dot{\boldsymbol{r}}\right)^2 \tag{2}$$

$$= \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{M}\dot{\boldsymbol{r}}^2. \tag{3}$$

交差項 $\dot{\boldsymbol{R}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}$ の係数は $-m_1m_2/M + m_2m_1/M = 0$ なので相殺する。よって

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\boldsymbol{r}}^2 - U(\boldsymbol{r}), \qquad M = m_1 + m_2, \quad \mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}.} \tag{4}$$

重心座標と相対座標の運動は独立に分離された。

以下では $U = U(r)$ とし、相対運動だけを考える。

[2] 極座標でのラグランジアン

平面極座標 $\boldsymbol{r} = (r\cos\phi, r\sin\phi, 0)$ の速度の大きさの二乗は

$$\dot{\boldsymbol{r}}^{\,2} = \dot{r}^{\,2} + r^2\dot{\phi}^{\,2}. \tag{5}$$

従って

$$\boxed{L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^{\,2} + r^2\dot{\phi}^{\,2}) - U(r).} \tag{6}$$

[3] 角運動量と有効ポテンシャル

L は ϕ に陽に依存しないので ϕ は循環座標である。Euler–Lagrange 方程式より

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = \frac{d}{dt}(\mu r^2\dot{\phi}) = 0, \qquad \boxed{l = \mu r^2\dot{\phi} = \text{一定}.} \tag{7}$$

r に関する方程式は

$$\mu\ddot{r} = \mu r\dot{\phi}^{\,2} - \frac{dU}{dr} = \frac{l^2}{\mu r^3} - \frac{dU}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}\right). \tag{8}$$

したがって半径方向の運動は、有効ポテンシャル

$$U_{\rm eff}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2} \tag{9}$$

中の一次元運動と同じである。$l \neq 0$ のとき第二項は角運動量による遠心障壁と呼ばれ、半径方向の運動方程式に外向きの力 $l^2/(\mu r^3)$ を加える。

[4] エネルギー保存

半径方向の運動方程式に $\dot{r}$ を掛けると

$$\mu \dot{r}\ddot{r} = -\frac{dU_{\rm eff}}{dr}\dot{r} = -\frac{dU_{\rm eff}}{dt}. \tag{10}$$

よって

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^{\,2} + U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2} = \text{一定}.} \tag{11}$$

[5] Laplace–Runge–Lenz ベクトル

$U(r) = -k/r$（$k > 0$）の運動方程式は $\ddot{\boldsymbol{r}} = -k\hat{\boldsymbol{r}}/(\mu r^2)$、ただし $\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}/r$ である。角運動量 $\boldsymbol{l} = \mu \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}$ は一定。原本で与えられたベクトルを

$$\boldsymbol{A} = \mu \dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{l} - \mu k \hat{\boldsymbol{r}} \tag{12}$$

と書く。

$$\dot{\boldsymbol{A}} = \mu \ddot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{l} - \mu k \dot{\hat{\boldsymbol{r}}} \tag{13}$$

$$= -\frac{k}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{l} - \mu k \dot{\hat{\boldsymbol{r}}} = 0, \tag{14}$$

ここでは、$\dot{r} = \hat{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}$ として

$$\hat{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{l} = \mu \hat{\boldsymbol{r}} \times (\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}) = \mu r(\dot{r}\hat{\boldsymbol{r}} - \dot{\boldsymbol{r}}) = -\mu r^2 \dot{\hat{\boldsymbol{r}}} \tag{15}$$

を用いた。最後の等号は $\dot{\hat{\boldsymbol{r}}} = (\dot{\boldsymbol{r}} - \dot{r}\hat{\boldsymbol{r}})/r$ による。したがって $\boldsymbol{A}$ も保存する。

ベクトル積 $\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{l}$ と $\boldsymbol{r}$ はともに $\boldsymbol{l}$ と垂直なので

$$\boxed{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{l} = 0.} \tag{16}$$

またスカラー三重積を使うと

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{r} = \mu(\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{l}) \cdot \boldsymbol{r} - \mu k r \tag{17}$$

$$= \mu \boldsymbol{l} \cdot (\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}) - \mu k r = l^2 - \mu k r. \tag{18}$$

$A = |\boldsymbol{A}|$ とする。$l \neq 0$、$A \neq 0$ の場合には、$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{r}$ のなす角 α を使って $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{r} = Ar\cos\alpha$ と等置し、

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{l^2}\left(1 + \frac{A}{\mu k}\cos\alpha\right), \qquad A = |\boldsymbol{A}|.} \tag{19}$$

を得る。これは焦点を中心力の中心に持つ円錐曲線の極座標表示である。

$A = 0$ の円軌道では α は定義できないが、上の内積恒等式から直接 $r = l^2/(\mu k)$ が得られる。一方、$l = 0$ の直線軌道では l^2 で除算できないため、この軌道式を使わず、半径方向の運動方程式 $\mu \ddot{r} = -k/r^2$（$r > 0$）で扱う。