物理工学専攻院試解答集
2013 年度物理学 I 第 1 問

政岡凜太郎

[1] 円柱 B にはたらく摩擦

円柱 B の中心を原点に取り、右向きを x 軸正方向とする。円柱 C から B が受ける接線摩擦力 F は接触点で左下向き、床からの摩擦力 F' は床面に沿って左向きである。C から B への法線力を T、床から B への法線力を N とすると、B に作用する力は次のようになる。

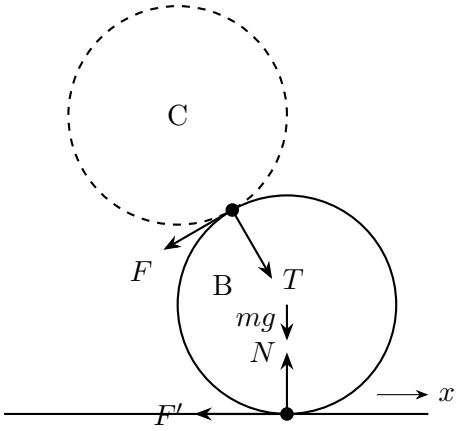


図 1: 円柱 B の自由物体図。摩擦力は各接触面の接線方向。

B の中心軸まわりでは、C との接触摩擦と床摩擦が腕の長さ a で逆向きのトルクを作る。静止しているので

$$\boxed{F = F'.} \tag{1}$$

[2] 静止に必要な摩擦係数

左右対称なので、C が A、B から受ける接触力の鉛直成分を合計すると

$$2\left(\frac{F}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}T\right) = mg, \qquad F + \sqrt{3}T = mg. \tag{2}$$

B の水平方向の釣合いは

$$-F' - \frac{\sqrt{3}}{2}F + \frac{1}{2}T = 0. \tag{3}$$

$F' = F$ と連立して

$$F = F' = \frac{2-\sqrt{3}}{2}mg, \qquad T = \frac{1}{2}mg. \tag{4}$$

B の鉛直釣合いから床の法線力は

$$N = mg + \frac{1}{2}F + \frac{\sqrt{3}}{2}T = \frac{3}{2}mg. \tag{5}$$

よって、円柱間と床面でそれぞれ静止摩擦力が最大静止摩擦力を越えないための条件は

$$\boxed{\mu \geq \frac{F}{T} = 2 - \sqrt{3}, \qquad \mu' \geq \frac{F'}{N} = \frac{2-\sqrt{3}}{3}.} \tag{6}$$

等号は最大静止摩擦力が働く限界の状態を表し、この場合も静止の条件に含まれる。

[3] 円柱の慣性モーメント

円柱の体積密度は $m/(\pi a^2 l)$。中心軸から距離 r の薄い円筒殻の質量は $2\pi r l\, dr$ に密度を掛けたものだから

$$I = \int_0^a r^2 \frac{m}{\pi a^2 l}(2\pi r l)\, dr = \frac{2m}{a^2}\int_0^a r^3\, dr \tag{7}$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}ma^2}. \tag{8}$$

[4] 位置 T までの運動

右向きを正、反時計回りを正とする。床接点の床に対する速度は $v+a\omega$ で、初期値は $v_0+a\omega_0 > 0$ である。この速度が初めて 0 になるまでは接点が右へ滑るので、動摩擦力は左向きで大きさ $\mu'' mg$ となる。以下の滑走中の式はこの区間に適用する。摩擦は並進速度を減らし、反時計回りの角速度も減らす。

$$m\dot{v} = -\mu'' mg, \qquad I\dot{\omega} = -a\mu'' mg. \tag{9}$$

$I = ma^2/2$ を使い初期条件を入れると

$$v(t) = v_0 - \mu'' g t, \qquad \omega(t) = \omega_0 - \frac{2\mu'' g}{a} t. \tag{10}$$

重心が一時停止する位置 T では $t_T = v_0/(\mu'' g)$ なので

$$\boxed{ST = v_0 t_T - \frac{1}{2}\mu'' g t_T^2 = \frac{v_0^2}{2\mu'' g}}, \qquad \boxed{\omega(T) = \omega_0 - \frac{2v_0}{a}}. \tag{11}$$

[5] 滑らずに転がり始める速さ

床との相対速度がゼロになる条件は、床接点の速度 $v + a\omega = 0$。滑走中

$$v(t) + a\omega(t) = v_0 + a\omega_0 - 3\mu'' g t \tag{12}$$

だから、転がり開始時刻は

$$t_R = \frac{v_0 + a\omega_0}{3\mu'' g}. \tag{13}$$

そのときの符号付き重心速度は

$$v_R = v_0 - \mu'' g t_R = \frac{2v_0 - a\omega_0}{3}. \tag{14}$$

問題の [6] の状況では $t_R > t_T$ であり、$v_R < 0$。従って速さは

$$\boxed{|v_R| = \frac{a\omega_0 - 2v_0}{3}}. \tag{15}$$

[6] 位置 S へ戻る条件

転がり始めるのが T 通過より後であるには $t_R > t_T$。滑走だけを続けた場合に S へ戻る時刻は $t_S = 2v_0/(\mu'' g)$ であり、S に達する前に滑りが止まるには $t_R < t_S$。したがって

$$\frac{v_0}{\mu'' g} < \frac{v_0 + a\omega_0}{3\mu'' g} < \frac{2v_0}{\mu'' g}. \tag{16}$$

$v_0, \mu'', g, a > 0$ を用いて整理すると

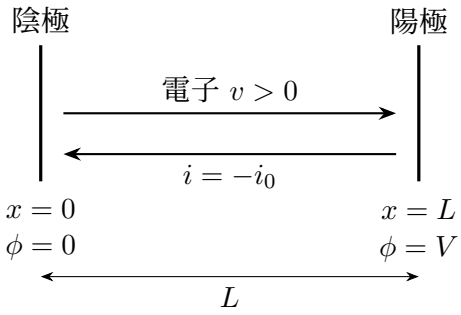
$$\boxed{\frac{2v_0}{a} < \omega_0 < \frac{5v_0}{a}}. \tag{17}$$

この範囲では T の後に左向きの無滑り運動へ移り、S までの距離を等速で戻る。

物理工学専攻院試解答集
2013 年度物理学 I 第 2 問

政岡凜太郎

陰極を $x=0$、陽極を $x=L$ とし、電位差を $V>0$ とする。電子は陰極から陽極へ進む一方、慣用電流は逆向きである。原本の装置を一次元で表すと次のようになる。



[1] 電子の速度

電子が陰極を出るときの運動エネルギーを無視できる。電荷 $-e$ の電位エネルギーは $-e\phi$ なので、陰極から x までのエネルギー保存は

$$\frac{1}{2}mv(x)^2 - e\phi(x) = 0. \tag{1}$$

従って陽極向きを正とする速度は

$$\boxed{v(x) = \sqrt{\frac{2e\phi(x)}{m}}}. \tag{2}$$

[2] 定常電流

電荷保存則は $\partial\rho/\partial t + \partial i/\partial x = 0$ である。定常状態では $\partial\rho/\partial t = 0$ だから $\partial i/\partial x = 0$、すなわち i は一定である。電子数密度を $n>0$、速度を $v>0$ とすると電子の電荷は $-e$ なので

$$i = -env = -i_0, \qquad i_0 > 0. \tag{3}$$

[3] 電位の微分方程式

定常電流から $n = i_0/(ev)$ であり、これを Poisson 方程式 $\epsilon_0\phi'' = en$ に代入すると

$$\phi''(x) = \frac{i_0}{\epsilon_0 v(x)} = \frac{i_0}{\epsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}\,\phi(x)^{-1/2}. \tag{4}$$

従って

$$\boxed{A = \frac{i_0}{\epsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}, \qquad \alpha = -\frac{1}{2}.} \tag{5}$$

[4] 電位分布

$A>0$ であり、$x>0$ では ϕ は増加する。右辺の $\phi^{-1/2}$ は陰極端 $\phi=0$ で定義されないので、微分方程式は $x>0$ で積分し、$x\to 0^{+}$ で $\phi,\phi'\to 0$ を課して積分定数を定める。微分方程式に ϕ' を掛けると

$$\frac{1}{2}\bigl(\phi'(x)\bigr)^{2} = 2A\sqrt{\phi(x)}, \qquad \phi'(x) = 2\sqrt{A}\,\phi(x)^{1/4}. \tag{6}$$

この式をさらに積分して

$$\frac{4}{3}\phi(x)^{3/4} = 2\sqrt{A}\,x \tag{7}$$

を得る。よって陰極境界を満たす電位は

$$\boxed{\phi(x) = \left(\frac{9A}{4}\right)^{2/3} x^{4/3} = \left[\frac{9i_0}{4\epsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}\right]^{2/3} x^{4/3}.} \tag{8}$$

実際、この解は $\phi(0)=0$ および $\phi'(0)=0$ を満たし、$x>0$ で $\phi''>0$ となる。ただし $\phi''(x)=\frac{4}{9}(9A/4)^{2/3}x^{-2/3}$ は $x\to 0^{+}$ で発散する。したがって微分方程式は $x>0$ で用い、陰極での電位と電場の条件は $x\to 0^{+}$ の極限として課している。

[5] 電流電圧則

陽極で $\phi(L)=V$ とおくと、電位分布を i_0 について解いて

$$\boxed{i_0 = \frac{4}{9}\epsilon_0\sqrt{\frac{2e}{m}}\,\frac{V^{3/2}}{L^{2}}.} \tag{9}$$

これは平板真空ダイオードの空間電荷制限電流密度である。i_0 は電圧の $3/2$ 乗に比例し、電極間隔の二乗に反比例する。符号付き慣用電流は $i=-i_0$ である。

物理工学専攻院試解答集
2013 年度物理学 II 第 1 問

政岡凜太郎

生成・消滅演算子を用いると

$$\hat{X} = x_0(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \qquad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}, \qquad \hat{H}_0 = \hbar\omega_0 \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right). \tag{1}$$

[1] 双極子遷移

$\hat{\mu} = q\hat{X}$ だから、数状態間の行列要素は

$$\langle l|\hat{\mu}|n\rangle = qx_0 \left(\sqrt{n}\,\delta_{l,n-1} + \sqrt{n+1}\,\delta_{l,n+1}\right). \tag{2}$$

従って $n \geq 1$ なら $|n-1\rangle, |n+1\rangle$ へ遷移でき、基底状態 $|0\rangle$ からは $|1\rangle$ だけが許される。

[2] 四次摂動によるエネルギー補正

一次摂動論では $\Delta E_n = \langle n|\lambda\hat{X}^4|n\rangle$ である。$Q = \hat{a} + \hat{a}^\dagger$ とおき、問題文の昇降作用を 2 回用いると

$$Q^2|n\rangle = \sqrt{n(n-1)}|n-2\rangle + (2n+1)|n\rangle + \sqrt{(n+1)(n+2)}|n+2\rangle. \tag{3}$$

$n < 2$ のとき最初の項はなく、負の添字の状態は含めない。Q は Hermite であり、異なる数状態は直交するので、

$$\begin{aligned}\langle n|Q^4|n\rangle &= \|Q^2|n\rangle\|^2 &(4)\\ &= n(n-1) + (2n+1)^2 + (n+1)(n+2) &(5)\\ &= 6n^2 + 6n + 3. &(6)\end{aligned}$$

したがって

$$\boxed{\Delta E_n = 3\lambda(2n^2 + 2n + 1)\left(\frac{\hbar}{2m\omega_0}\right)^2.} \tag{7}$$

[3] 摂動後の双極子遷移

摂動を一次まで含む規格化固有状態は

$$|n\rangle' = |n\rangle + \frac{\lambda x_0^4}{\hbar\omega_0} \sum_{\substack{k\neq n \\ |k-n|\in\{2,4\}}} \frac{\langle k|Q^4|n\rangle}{n-k}|k\rangle + O(\lambda^2), \qquad Q = \hat{a} + \hat{a}^\dagger. \tag{8}$$

四次演算子は偶数準位だけを混ぜるので、$|8\rangle'$ と反対パリティの状態だけが双極子遷移の候補となる。さらに Q は準位を 1 つだけ変えるため、候補は $l = 3, 5, 7, 9, 11, 13$ である。ただし候

補範囲だけでは行列要素の非零性は決まらない。$Q_{lk} = \langle l|Q|k\rangle$ と書く。Q を 4 回作用させると、非対角行列要素は

$$(Q^4)_{n+2,n} = (4n+6)\sqrt{(n+1)(n+2)}, \tag{9}$$

$$(Q^4)_{n+4,n} = \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \qquad (n \geq 0) \tag{10}$$

となる。準位を下げる行列要素は、これらの実行列要素の添字を交換して得られる。$\eta = \lambda x_0^4/(\hbar\omega_0)$ とすると、一次遷移振幅は

$$\frac{\langle l'|q\hat{X}|8'\rangle}{qx_0} = Q_{l8} + \eta\left[\sum_{k\neq l}\frac{(Q^4)_{kl}Q_{k8}}{l-k} + \sum_{k\neq 8}\frac{Q_{lk}(Q^4)_{k8}}{8-k}\right] + O(\eta^2). \tag{11}$$

$l = 13$ では一次補正に寄与するのは、終状態の $|9\rangle$ 成分と初期状態の $|12\rangle$ 成分だけである。その二項は

$$\frac{\sqrt{13}\,(Q^4)_{12,8}}{4} + \frac{\sqrt{13}\,(Q^4)_{12,8}}{-4} = 0. \tag{12}$$

上の角括弧内の二つの総和へ行列要素を代入する。各行で左の加数が終状態の補正、右の加数が初期状態の補正からの寄与である。

$$l = 3: \quad -2\sqrt{105} + 2\sqrt{105} = 0, \tag{13}$$

$$l = 5: \quad -61\sqrt{21} + 65\sqrt{21} = 4\sqrt{21}, \tag{14}$$

$$l = 7: \quad -153\sqrt{8} + 105\sqrt{8} = -48\sqrt{8}, \tag{15}$$

$$l = 9: \quad 408 - 570 = -162, \tag{16}$$

$$l = 11: \quad 69\sqrt{110} - 66\sqrt{110} = 3\sqrt{110}. \tag{17}$$

従って $l = 3$ でも一次振幅が消える。残る 4 つの振幅は

$$\frac{\langle 5'|q\hat{X}|8'\rangle}{qx_0} = 4\sqrt{21}\,\eta + O(\eta^2), \qquad \frac{\langle 7'|q\hat{X}|8'\rangle}{qx_0} = \sqrt{8}(1-48\eta) + O(\eta^2), \tag{18}$$

$$\frac{\langle 9'|q\hat{X}|8'\rangle}{qx_0} = 3(1-54\eta) + O(\eta^2), \qquad \frac{\langle 11'|q\hat{X}|8'\rangle}{qx_0} = 3\sqrt{110}\,\eta + O(\eta^2). \tag{19}$$

従って求める遷移先は

$$\boxed{|5\rangle',\ |7\rangle',\ |9\rangle',\ |11\rangle'.} \tag{20}$$

[4] Heisenberg 表示の位置演算子

$[\hat{H}_0, \hat{a}] = -\hbar\omega_0\hat{a}$、$[\hat{H}_0, \hat{a}^\dagger] = \hbar\omega_0\hat{a}^\dagger$ より

$$\hat{a}(t) = e^{-i\omega_0 t}\hat{a}(0), \qquad \hat{a}^\dagger(t) = e^{i\omega_0 t}\hat{a}^\dagger(0). \tag{21}$$

従って

$$\hat{X}(t) = x_0\left(e^{-i\omega_0 t}\hat{a}(0) + e^{i\omega_0 t}\hat{a}^\dagger(0)\right) \tag{22}$$

$$= \boxed{\hat{X}(0)\cos(\omega_0 t) + \frac{\hat{P}(0)}{m\omega_0}\sin(\omega_0 t).} \tag{23}$$

[5] 位置の期待値

数状態では $\langle n|\hat{X}(0)|n\rangle = \langle n|\hat{P}(0)|n\rangle = 0$ なので

$$\boxed{\langle n|\hat{X}(t)|n\rangle = 0.} \tag{24}$$

有限振幅で振動する例は、$\hat{a}$ の固有状態である規格化コヒーレント状態

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle, \qquad \hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \tag{25}$$

である。この状態では

$$\boxed{\langle\alpha|\hat{X}(t)|\alpha\rangle = 2x_0\,\mathrm{Re}\left(\alpha e^{-i\omega_0 t}\right),} \tag{26}$$

となり、$\alpha \neq 0$ なら有限の振幅で角振動数 ω_0 の正弦振動をする。

物理工学専攻院試解答集
2013 年度物理学 II 第 2 問

政岡凜太郎

[1] Bose–Einstein 分布

エネルギー E の一粒子状態の平均占有数は

$$\boxed{f_{BE}(E) = \frac{1}{\exp[(E-\mu)/(k_B T)] - 1}.} \tag{1}$$

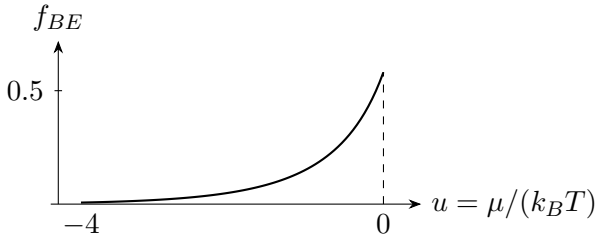
最低エネルギーを $E_0 = 0$ としたので、基底状態も含めて分母を正に保つには $\mu < 0$ が必要である。凝縮相の熱力学極限では $\mu \to 0^-$ を考え、励起状態 $E > 0$ の分布には $\mu = 0$ を用いる。この極限で基底状態の占有数は発散するため、凝縮粒子数は励起状態の分布と分けて数える。

[2] μ への依存

E と $T > 0$ を固定すると

$$\frac{\partial f_{BE}}{\partial \mu} = \frac{e^{(E-\mu)/(k_B T)}}{k_B T \left(e^{(E-\mu)/(k_B T)} - 1\right)^2} > 0, \tag{2}$$

なので f_{BE} は μ とともに単調に増加する。以下は例として $E > 0$ かつ $E/(k_B T) = 1$ の概形である。許される $\mu \leq 0$ では $\mu = 0$ に有限値で近づく。基底状態 $E = 0$ では $\mu \to 0^-$ で発散する。



[3] 状態密度

運動量空間でエネルギーが E 以下の領域は半径 $\sqrt{2mE}$ の球である。スピン縮退がなく、状態を位相空間体積 h^3 ごとに数えると

$$\mathcal{N}(E) = \frac{V}{h^3}\frac{4\pi}{3}(2mE)^{3/2} = \frac{V}{6\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} E^{3/2}, \tag{3}$$

$$D(E) = \frac{d\mathcal{N}}{dE} = \boxed{\frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} E^{1/2}.} \tag{4}$$

[4] 励起粒子数の上限

固定した E で占有数は μ とともに増すから、励起状態の粒子数は $\mu = 0$ で最大となる。$\beta = 1/(k_B T)$ とし $x = \beta E$ と変数変換すると

$$N_t^{\max} = \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}(k_B T)^{3/2}\int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{e^x - 1}\,dx \tag{5}$$

$$= \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}(k_B T)^{3/2}\Gamma(3/2)\zeta(3/2) \tag{6}$$

$$= \boxed{V\zeta(3/2)\left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}.} \tag{7}$$

従って $T \to 0$ で $N_t^{\max} \to 0$ となる。

[5] 臨界温度

臨界点では励起状態に全粒子を収容できる限界に達し、$N = N_t^{\max}(T_c)$ である。よって

$$\boxed{T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B}\left[\frac{N}{V\zeta(3/2)}\right]^{2/3}.} \tag{8}$$

[6] 凝縮成分

有限系での基底占有数は $N_0 = f_{BE}(0) = [\exp(-\mu/k_B T) - 1]^{-1}$ だから、$\mu = -k_B T \ln(1 + 1/N_0)$ である。$T < T_c$ では余剰粒子が基底状態を巨視的に占め、熱力学極限で $N_0 \to \infty$ とともに $\mu \to 0^-$ となる。この極限で励起状態の分布に $\mu = 0$ を代入すると、その粒子数は $N_t^{\max}(T)$ に飽和する。残り

$$N_0 = N - N_t^{\max}(T) \tag{9}$$

は $E = 0$ の基底状態を巨視的に占める。したがって $E > 0$ の連続状態の積分だけで凝縮粒子数を数えない。

[7] 全エネルギーと定積熱容量

基底状態のエネルギーを 0 とすると、全エネルギーは励起状態の寄与だけである。

$$U = \int_0^\infty E D(E) f_{BE}(E)\,dE \tag{10}$$

$$= \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}(k_B T)^{5/2}\int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^x - 1}\,dx \tag{11}$$

$$= \boxed{\frac{3}{2}V\zeta(5/2)\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}(k_B T)^{5/2}.} \tag{12}$$

固定 N, V で微分する。凝縮相では $\mu = 0$ であり、励起状態の U は上式の温度依存だけを持つため

$$\boxed{C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{N,V} = \frac{15}{4}Vk_B\zeta(5/2)\left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}.} \tag{13}$$

[8] 液体 ^{4}He の数値評価

数密度を質量密度から求めると

$$n = \frac{N}{V} = \frac{1.5 \times 10^2}{6.7 \times 10^{-27}} = 2.24 \times 10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}. \tag{14}$$

臨界温度は

$$T_c = \frac{2\pi(1.1 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s})^2}{(6.7 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg})(1.4 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K})} \left(\frac{2.24 \times 10^{28}\,\mathrm{m}^{-3}}{2.61}\right)^{2/3} = 3.40\ \mathrm{K}. \tag{15}$$

有効数字 1 桁では $\boxed{T_c \simeq 3\ \mathrm{K}}$ である。

[9] 理想気体模型との違い

実際の液体ヘリウムでは原子間相互作用を無視できず、相関のある液体となる。ここで用いた理想気体は相互作用を全く含まないため、その臨界温度は実験の超流動転移温度と一致する必要はない。

物理工学専攻院試解答集
2013 年度物理学 II 第 3 問

政岡凜太郎

領域 II ($|x| < d$) の屈折率を n_2、領域 I・III ($|x| > d$) の屈折率を $n_1 < n_2$ とする。界面に平行な z 方向の波数を $\beta > 0$ とし、原本の位相因子 $e^{i(\omega t - \beta z)}$ を用いる。

[1] 閉じ込め条件

界面に沿う波数成分は境界で連続である。コア内の波数の大きさは $k_0 n_2$ なので $\beta = k_0 n_2 \sin\theta$ である。クラッドで x 方向に伝搬せず減衰するには、その媒質中の全波数 $k_0 n_1$ より界面平行成分が大きくなければならない。一方コア内では横方向に振動するので

$$\boxed{k_0 n_1 < \beta < k_0 n_2.} \tag{1}$$

下端ではクラッドの減衰率が 0、上端ではコアの横波数が 0 となり、いずれも束縛モードの条件から外れる。

[2] Maxwell 方程式

媒質 j では $\epsilon_j = \epsilon_0 n_j^2$、$\mu = \mu_0$ とする。z 依存は $\partial/\partial z = -i\beta$ なので、$\nabla \times \boldsymbol{E} = -i\omega\mu_0 \boldsymbol{H}$ と $\nabla \times \boldsymbol{H} = i\omega\epsilon_j \boldsymbol{E}$ の成分比較から

$$E_y' = -i\mu_0\omega H_z, \qquad H_x = -\frac{\beta}{\mu_0\omega} E_y, \tag{2}$$

$$H_y = 0, \qquad H_z' = i\left(\frac{\beta^2}{\mu_0\omega} - \epsilon_j\omega\right) E_y. \tag{3}$$

ここで H_y は $\beta > 0$ による成分式から 0 であり、Maxwell 方程式の残りの成分とも整合する。

[3] H_z は恒等的にゼロにはならない

領域 II で H_z が恒等的にゼロであると仮定する。このとき $H_z' = 0$ なので、[2] の成分式より

$$0 = \frac{i}{\mu_0\omega}(\beta^2 - k_0^2 n_2^2) E_y. \tag{4}$$

[1] の $\beta < k_0 n_2$ より括弧内は非零であり、領域 II で E_y も恒等的にゼロとなる。さらに $H_x = -\beta E_y/(\mu_0\omega)$ と $H_y = 0$ より、同領域の電磁場はすべてゼロとなり、非自明な場が伝搬することに反する。従って

$$\boxed{H_z \not\equiv 0 \qquad (-d < x < d).} \tag{5}$$

[4] 電場の波動方程式

[2] の式を微分すると $E_y'' = -i\mu_0\omega H_z'$ であるから

$$\boxed{\frac{d^2E_y}{dx^2} + (k_0^2 n_j^2 - \beta^2)E_y = 0, \qquad j = \begin{cases} 1 & (|x| > d), \\ 2 & (|x| < d). \end{cases}} \tag{6}$$

コアでは $k = \sqrt{k_0^2 n_2^2 - \beta^2} > 0$、クラッドでは $\kappa = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_1^2} > 0$ とおく。

[5] 偶対称固有モード

コア内の偶関数解と外側で減衰する解を

$$E_y(x) = \begin{cases} a\cos(kx), & |x| < d, \\ a\cos(kd)e^{-\kappa(|x|-d)}, & |x| \geq d \end{cases} \tag{7}$$

と置く。E_y の連続性は外側の振幅を上式のように定める。$x = d$ で微分も連続する条件は

$$-ak\sin(kd) = -a\kappa\cos(kd), \qquad k\tan(kd) = \kappa. \tag{8}$$

従って

$$\boxed{A(\beta) = kd = d\sqrt{k_0^2 n_2^2 - \beta^2}, \qquad B(\beta) = \frac{\kappa}{k} = \sqrt{\frac{\beta^2 - k_0^2 n_1^2}{k_0^2 n_2^2 - \beta^2}}, \qquad \tan A = B.} \tag{9}$$

[6] 固有値と単一モード条件

$B > 0$ だから $\arctan B$ は $(-\pi/2, \pi/2)$ にあり、$\tan A = B$ は

$$F(\beta) = A(\beta) - \arctan B(\beta) = m\pi, \qquad m \in \mathbb{Z} \tag{10}$$

と同値である。許容区間 $k_0 n_1 < \beta < k_0 n_2$ で A は減少し、B は増加するため F は単調減少する。端点極限は

$$\lim_{\beta \to k_0 n_1 +} F(\beta) = A_{\max} = k_0 d\sqrt{n_2^2 - n_1^2} > 0, \tag{11}$$

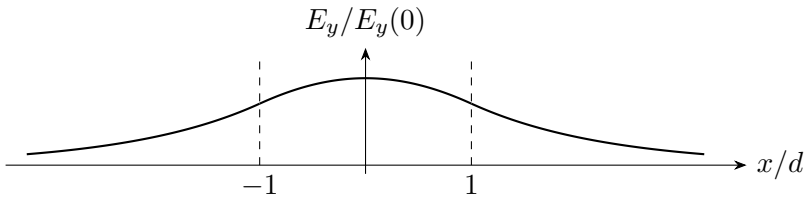
$$\lim_{\beta \to k_0 n_2 -} F(\beta) = -\frac{\pi}{2}. \tag{12}$$

よって $F = 0$ を満たす偶対称モードは必ず少なくとも 1 つある。F の値域に π が含まれるのは $A_{\max} > \pi$ のときで、その場合にはもう 1 つの偶モードが存在する。従って偶モードが 1 つだけとなる正確な条件は

$$\boxed{k_0 d\sqrt{n_2^2 - n_1^2} \leq \pi.} \tag{13}$$

等号では $F = \pi$ は $\beta = k_0 n_1$ という許容区間外の端でしか達しないため、追加の減衰束縛モードはない。

単一モード時はコア内に節のない偶関数形となり、両クラッドへ指数関数的に減衰する。図では横座標を x/d、縦座標を $E_y/E_y(0)$ とし、例として $kd = \kappa d = \pi/4$ を選ぶ。この組は界面条件 $k\tan(kd) = \kappa$ を満たし、上で定めた $A = kd = \pi/4$、$B = \kappa/k = 1$ に対応する（例えば $\beta d = 2$ とすれば、対応する屈折率比も $n_1 < n_2$ となる）。


$E_y/E_y(0)$
x/d
-1
1

物理工学専攻院試解答集
2013 年度物理学 II 第 4 問

政岡凜太郎

[1] 二原子格子の分散関係

ばねの配置から、単位格子 n の変位は

$$m\ddot{u}_n = C_1(v_n - u_n) + C_2(v_{n-1} - u_n), \tag{1}$$
$$m\ddot{v}_n = C_1(u_n - v_n) + C_2(u_{n+1} - v_n). \tag{2}$$

Bloch 波を

$$u_n = ue^{i(kan-\omega t)}, \qquad v_n = ve^{i(ka(n+1/2)-\omega t)} \tag{3}$$

とおく。振幅の方程式は

$$\begin{pmatrix} m\omega^2 - C_1 - C_2 & C_1e^{ika/2} + C_2e^{-ika/2} \\ C_2e^{ika/2} + C_1e^{-ika/2} & m\omega^2 - C_1 - C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0. \tag{4}$$

非自明解には行列式が 0 であることが必要なので

$$\boxed{\omega_{\pm}^2(k) = \frac{C_1 + C_2 \pm \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + 2C_1C_2\cos(ka)}}{m}}. \tag{5}$$

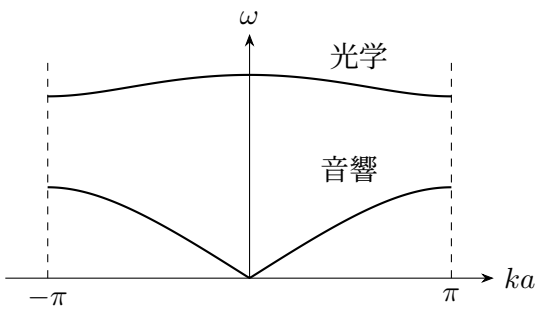
$\omega_-(k)$ が音響枝、$\omega_+(k)$ が光学枝である。

[2] 第一ブリルアン領域

第一ブリルアン領域は $-\pi/a \le k \le \pi/a$ である。端点と中心で

$$\omega_a(0) = 0, \qquad \omega_o(0) = \sqrt{\frac{2(C_1 + C_2)}{m}}, \tag{6}$$
$$\omega_a(\pi/a) = \sqrt{\frac{2C_2}{m}}, \qquad \omega_o(\pi/a) = \sqrt{\frac{2C_1}{m}}, \tag{7}$$

ここで $C_1 > C_2$ を用いた。図では $C_1 = 4, C_2 = 1, m = 1$ とし、横軸は ka で表す（ばね定数と質量は同じ単位系）。



音響枝の長波長極限は、$\cos(ka) \simeq 1 - (ka)^2/2$ を用いると

$$\omega_a(k) \simeq v_a|k|, \qquad \boxed{v_a = a\sqrt{\frac{C_1C_2}{2m(C_1+C_2)}}}. \tag{8}$$

光学枝は

$$\omega_o(k) \simeq \sqrt{\frac{2(C_1+C_2)}{m}} - \frac{C_1C_2a^2k^2}{4\sqrt{2m(C_1+C_2)^3}}. \tag{9}$$

したがって $k \to 0$ で、音響枝の群速度は v_a（$k < 0$ 側は $-v_a$）、光学枝の群速度は

$$v_{g,o} \simeq -\frac{C_1C_2a^2}{2\sqrt{2m(C_1+C_2)^3}}k \longrightarrow 0. \tag{10}$$

[3] 長波長での原子の振動

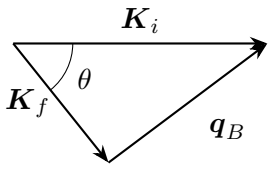
$k = 0$ で [1] の固有行列に音響枝の $\omega_a = 0$ を代入すると $-(C_1+C_2)u + (C_1+C_2)v = 0$、すなわち $u = v$ である。光学枝の $m\omega_o^2 = 2(C_1+C_2)$ を代入すると $(C_1+C_2)(u+v) = 0$、すなわち $u = -v$ となる。$k \to 0$ では Bloch 位相 $e^{ika/2} \to 1$ だから、この振幅関係が実変位 u_n, v_n の同位相・逆位相にそのまま対応する。従って音響枝では隣接原子がまとまって動き、光学枝では二つの基底原子が互いに逆向きに振動する。

[4] 光子の非弾性散乱

結晶へ渡る運動量は入射光子から散乱光子を引いた差であるため

$$\boldsymbol{K}_i = \boldsymbol{K}_f + \boldsymbol{q}_B. \tag{11}$$

三角形の頂点をつなぐと



である。$\omega_i \gg \omega_B$ なら $|\boldsymbol{K}_f| \simeq |\boldsymbol{K}_i|$ なので

$$|\boldsymbol{q}_B|^2 = |\boldsymbol{K}_i|^2 + |\boldsymbol{K}_f|^2 - 2|\boldsymbol{K}_i||\boldsymbol{K}_f|\cos\theta \tag{12}$$

$$\simeq 2|\boldsymbol{K}_i|^2(1-\cos\theta), \tag{13}$$

$$\boxed{|\boldsymbol{q}_B| \simeq 2|\boldsymbol{K}_i|\sin(\theta/2).} \tag{14}$$

[5] 音速と Brillouin 周波数

長波長音響フォノンでは $\omega_B = v_a|\boldsymbol{q}_B|$ である。媒質中の光子波数は $|\boldsymbol{K}_i| = n\omega_i/c$ だから

$$\boxed{\frac{\omega_B}{v_a} = \frac{2n\omega_i}{c}\sin(\theta/2).} \tag{15}$$

[6] 音速の数値

分光波数を $\tilde{\nu}_B = 1/\lambda_B = 3.0\,\mathrm{cm}^{-1} = 3.0\times10^2\,\mathrm{m}^{-1}$ とする。原本の $\hbar\omega_B = hc\tilde{\nu}_B$ と $h = 2\pi\hbar$ より $\omega_B = 2\pi c\tilde{\nu}_B$ である。また $\omega_i = 2\pi c/\lambda_i$ なので $\omega_B/\omega_i = \lambda_i\tilde{\nu}_B$。散乱角 180° では

$$v_a = \frac{c}{2n}\frac{\omega_B}{\omega_i} = \frac{c\lambda_i\tilde{\nu}_B}{2n} \tag{16}$$

$$= \frac{(3.0\times10^8)(680\times10^{-9})(3.0\times10^2)}{2(2.4)}\,\mathrm{m/s} \tag{17}$$

$$= 1.275\times10^4\,\mathrm{m/s} \simeq \boxed{1.3\times10^4\,\mathrm{m/s}} \quad (2\text{桁}). \tag{18}$$

[7] 中性子散乱からばね定数

$q = \pi/a$ では分散関係から

$$\omega_1 = \omega_o(\pi/a) = \sqrt{\frac{2C_1}{m}}, \qquad \omega_2 = \omega_a(\pi/a) = \sqrt{\frac{2C_2}{m}}. \tag{19}$$

中性子の運動エネルギー $E_n = \hbar^2K^2/(2M_n)$ と $K = 2\pi/\lambda$ を用いる。フォノンを生成するので

$$\frac{\hbar^2}{2M_n}\left[\left(\frac{2\pi}{\lambda_{ij}}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_f}\right)^2\right] = \hbar\omega_j, \qquad j = 1,2. \tag{20}$$

ここで $\lambda_{i1} < \lambda_{i2}$ なので、同一の λ_f に対して $j = 1$ のエネルギー移行が大きく、光学枝 C_1、$j = 2$ は音響枝 C_2 に対応する。$\Delta_j = \lambda_{ij}^{-2} - \lambda_f^{-2} > 0$ と置けば

$$\boxed{C_j = \frac{2m\pi^4\hbar^2}{M_n^2}\Delta_j^2, \qquad j = 1,2.} \tag{21}$$

[8] 格子定数

音響速度の式を a について解くと

$$a = v_a\sqrt{2m\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)}. \tag{22}$$

ばね定数の表式を代入して

$$\boxed{a = \frac{v_aM_n}{\pi^2\hbar}\sqrt{\frac{1}{\Delta_1^2} + \frac{1}{\Delta_2^2}}}, \qquad \Delta_j = \frac{1}{\lambda_{ij}^2} - \frac{1}{\lambda_f^2}. \tag{23}$$

この式は長さの次元を持ち、音速因子 v_a を含む。