# 物理工学専攻院試解答集
# 2013 年度物理学 II 第 4 問

政岡凜太郎

## [1] 二原子格子の分散関係

ばねの配置から、単位格子 $n$ の変位は

$$m\ddot{u}_n = C_1(v_n - u_n) + C_2(v_{n-1} - u_n), \tag{1}$$
$$m\ddot{v}_n = C_1(u_n - v_n) + C_2(u_{n+1} - v_n). \tag{2}$$

Bloch 波を

$$u_n = ue^{i(kan-\omega t)}, \qquad v_n = ve^{i(ka(n+1/2)-\omega t)} \tag{3}$$

とおく。振幅の方程式は

$$\begin{pmatrix} m\omega^2 - C_1 - C_2 & C_1e^{ika/2} + C_2e^{-ika/2} \\ C_2e^{ika/2} + C_1e^{-ika/2} & m\omega^2 - C_1 - C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0. \tag{4}$$

非自明解には行列式が 0 であることが必要なので

$$\boxed{\omega_{\pm}^2(k) = \frac{C_1 + C_2 \pm \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + 2C_1C_2\cos(ka)}}{m}}. \tag{5}$$

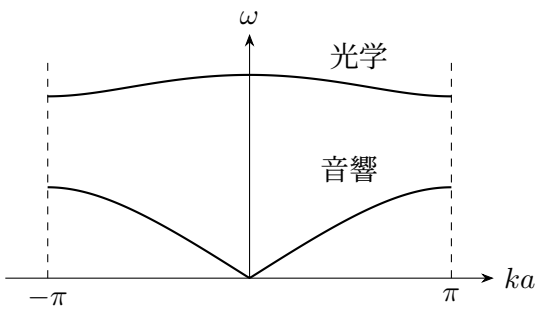
$\omega_-(k)$ が音響枝、$\omega_+(k)$ が光学枝である。

## [2] 第一ブリルアン領域

第一ブリルアン領域は $-\pi/a \le k \le \pi/a$ である。端点と中心で

$$\omega_a(0) = 0, \qquad \omega_o(0) = \sqrt{\frac{2(C_1 + C_2)}{m}}, \tag{6}$$
$$\omega_a(\pi/a) = \sqrt{\frac{2C_2}{m}}, \qquad \omega_o(\pi/a) = \sqrt{\frac{2C_1}{m}}, \tag{7}$$

ここで $C_1 > C_2$ を用いた。図では $C_1 = 4, C_2 = 1, m = 1$ とし、横軸は $ka$ で表す（ばね定数と質量は同じ単位系）。



音響枝の長波長極限は、$\cos(ka) \simeq 1 - (ka)^2/2$ を用いると

$$\omega_a(k) \simeq v_a|k|, \qquad \boxed{v_a = a\sqrt{\frac{C_1C_2}{2m(C_1+C_2)}}}. \tag{8}$$

光学枝は

$$\omega_o(k) \simeq \sqrt{\frac{2(C_1+C_2)}{m}} - \frac{C_1C_2a^2k^2}{4\sqrt{2m(C_1+C_2)^3}}. \tag{9}$$

したがって $k \to 0$ で、音響枝の群速度は $v_a$（$k < 0$ 側は $-v_a$）、光学枝の群速度は

$$v_{g,o} \simeq -\frac{C_1C_2a^2}{2\sqrt{2m(C_1+C_2)^3}}k \longrightarrow 0. \tag{10}$$

## [3] 長波長での原子の振動

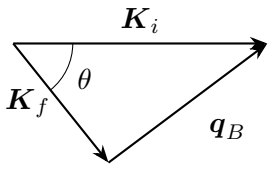
$k = 0$ で [1] の固有行列に音響枝の $\omega_a = 0$ を代入すると $-(C_1+C_2)u + (C_1+C_2)v = 0$、すなわち $u = v$ である。光学枝の $m\omega_o^2 = 2(C_1+C_2)$ を代入すると $(C_1+C_2)(u+v) = 0$、すなわち $u = -v$ となる。$k \to 0$ では Bloch 位相 $e^{ika/2} \to 1$ だから、この振幅関係が実変位 $u_n, v_n$ の同位相・逆位相にそのまま対応する。従って音響枝では隣接原子がまとまって動き、光学枝では二つの基底原子が互いに逆向きに振動する。

## [4] 光子の非弾性散乱

結晶へ渡る運動量は入射光子から散乱光子を引いた差であるため

$$\boldsymbol{K}_i = \boldsymbol{K}_f + \boldsymbol{q}_B. \tag{11}$$

三角形の頂点をつなぐと




である。$\omega_i \gg \omega_B$ なら $|\boldsymbol{K}_f| \simeq |\boldsymbol{K}_i|$ なので

$$|\boldsymbol{q}_B|^2 = |\boldsymbol{K}_i|^2 + |\boldsymbol{K}_f|^2 - 2|\boldsymbol{K}_i||\boldsymbol{K}_f|\cos\theta \tag{12}$$

$$\simeq 2|\boldsymbol{K}_i|^2(1-\cos\theta), \tag{13}$$

$$\boxed{|\boldsymbol{q}_B| \simeq 2|\boldsymbol{K}_i|\sin(\theta/2).} \tag{14}$$

## [5] 音速と Brillouin 周波数

長波長音響フォノンでは $\omega_B = v_a|\boldsymbol{q}_B|$ である。媒質中の光子波数は $|\boldsymbol{K}_i| = n\omega_i/c$ だから

$$\boxed{\frac{\omega_B}{v_a} = \frac{2n\omega_i}{c}\sin(\theta/2).} \tag{15}$$

## [6] 音速の数値

分光波数を $\tilde{\nu}_B = 1/\lambda_B = 3.0\,\mathrm{cm}^{-1} = 3.0\times10^2\,\mathrm{m}^{-1}$ とする。原本の $\hbar\omega_B = hc\tilde{\nu}_B$ と $h = 2\pi\hbar$ より $\omega_B = 2\pi c\tilde{\nu}_B$ である。また $\omega_i = 2\pi c/\lambda_i$ なので $\omega_B/\omega_i = \lambda_i\tilde{\nu}_B$。散乱角 $180^\circ$ では

$$v_a = \frac{c}{2n}\frac{\omega_B}{\omega_i} = \frac{c\lambda_i\tilde{\nu}_B}{2n} \tag{16}$$

$$= \frac{(3.0\times10^8)(680\times10^{-9})(3.0\times10^2)}{2(2.4)}\,\mathrm{m/s} \tag{17}$$

$$= 1.275\times10^4\,\mathrm{m/s} \simeq \boxed{1.3\times10^4\,\mathrm{m/s}} \quad (2\text{桁}). \tag{18}$$

## [7] 中性子散乱からばね定数

$q = \pi/a$ では分散関係から

$$\omega_1 = \omega_o(\pi/a) = \sqrt{\frac{2C_1}{m}}, \qquad \omega_2 = \omega_a(\pi/a) = \sqrt{\frac{2C_2}{m}}. \tag{19}$$

中性子の運動エネルギー $E_n = \hbar^2K^2/(2M_n)$ と $K = 2\pi/\lambda$ を用いる。フォノンを生成するので

$$\frac{\hbar^2}{2M_n}\left[\left(\frac{2\pi}{\lambda_{ij}}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_f}\right)^2\right] = \hbar\omega_j, \qquad j = 1,2. \tag{20}$$

ここで $\lambda_{i1} < \lambda_{i2}$ なので、同一の $\lambda_f$ に対して $j = 1$ のエネルギー移行が大きく、光学枝 $C_1$、$j = 2$ は音響枝 $C_2$ に対応する。$\Delta_j = \lambda_{ij}^{-2} - \lambda_f^{-2} > 0$ と置けば

$$\boxed{C_j = \frac{2m\pi^4\hbar^2}{M_n^2}\Delta_j^2, \qquad j = 1,2.} \tag{21}$$

## [8] 格子定数

音響速度の式を $a$ について解くと

$$a = v_a\sqrt{2m\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)}. \tag{22}$$

ばね定数の表式を代入して

$$\boxed{a = \frac{v_aM_n}{\pi^2\hbar}\sqrt{\frac{1}{\Delta_1^2} + \frac{1}{\Delta_2^2}}}, \qquad \Delta_j = \frac{1}{\lambda_{ij}^2} - \frac{1}{\lambda_f^2}. \tag{23}$$

この式は長さの次元を持ち、音速因子 $v_a$ を含む。