物理工学専攻院試解答集
2013 年度物理学 II 第 3 問

政岡凜太郎

領域 II ($|x| < d$) の屈折率を n_2、領域 I・III ($|x| > d$) の屈折率を $n_1 < n_2$ とする。界面に平行な z 方向の波数を $\beta > 0$ とし、原本の位相因子 $e^{i(\omega t - \beta z)}$ を用いる。

[1] 閉じ込め条件

界面に沿う波数成分は境界で連続である。コア内の波数の大きさは $k_0 n_2$ なので $\beta = k_0 n_2 \sin\theta$ である。クラッドで x 方向に伝搬せず減衰するには、その媒質中の全波数 $k_0 n_1$ より界面平行成分が大きくなければならない。一方コア内では横方向に振動するので

$$\boxed{k_0 n_1 < \beta < k_0 n_2.} \tag{1}$$

下端ではクラッドの減衰率が 0、上端ではコアの横波数が 0 となり、いずれも束縛モードの条件から外れる。

[2] Maxwell 方程式

媒質 j では $\epsilon_j = \epsilon_0 n_j^2$、$\mu = \mu_0$ とする。z 依存は $\partial/\partial z = -i\beta$ なので、$\nabla \times \boldsymbol{E} = -i\omega\mu_0 \boldsymbol{H}$ と $\nabla \times \boldsymbol{H} = i\omega\epsilon_j \boldsymbol{E}$ の成分比較から

$$E_y' = -i\mu_0\omega H_z, \qquad H_x = -\frac{\beta}{\mu_0\omega} E_y, \tag{2}$$

$$H_y = 0, \qquad H_z' = i\left(\frac{\beta^2}{\mu_0\omega} - \epsilon_j\omega\right) E_y. \tag{3}$$

ここで H_y は $\beta > 0$ による成分式から 0 であり、Maxwell 方程式の残りの成分とも整合する。

[3] H_z は恒等的にゼロにはならない

領域 II で H_z が恒等的にゼロであると仮定する。このとき $H_z' = 0$ なので、[2] の成分式より

$$0 = \frac{i}{\mu_0\omega}(\beta^2 - k_0^2 n_2^2) E_y. \tag{4}$$

[1] の $\beta < k_0 n_2$ より括弧内は非零であり、領域 II で E_y も恒等的にゼロとなる。さらに $H_x = -\beta E_y/(\mu_0\omega)$ と $H_y = 0$ より、同領域の電磁場はすべてゼロとなり、非自明な場が伝搬することに反する。従って

$$\boxed{H_z \not\equiv 0 \qquad (-d < x < d).} \tag{5}$$

[4] 電場の波動方程式

[2] の式を微分すると $E_y'' = -i\mu_0\omega H_z'$ であるから

$$\boxed{\frac{d^2E_y}{dx^2} + (k_0^2 n_j^2 - \beta^2)E_y = 0, \qquad j = \begin{cases} 1 & (|x| > d), \\ 2 & (|x| < d). \end{cases}} \tag{6}$$

コアでは $k = \sqrt{k_0^2 n_2^2 - \beta^2} > 0$、クラッドでは $\kappa = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_1^2} > 0$ とおく。

[5] 偶対称固有モード

コア内の偶関数解と外側で減衰する解を

$$E_y(x) = \begin{cases} a\cos(kx), & |x| < d, \\ a\cos(kd)e^{-\kappa(|x|-d)}, & |x| \geq d \end{cases} \tag{7}$$

と置く。E_y の連続性は外側の振幅を上式のように定める。$x = d$ で微分も連続する条件は

$$-ak\sin(kd) = -a\kappa\cos(kd), \qquad k\tan(kd) = \kappa. \tag{8}$$

従って

$$\boxed{A(\beta) = kd = d\sqrt{k_0^2 n_2^2 - \beta^2}, \qquad B(\beta) = \frac{\kappa}{k} = \sqrt{\frac{\beta^2 - k_0^2 n_1^2}{k_0^2 n_2^2 - \beta^2}}, \qquad \tan A = B.} \tag{9}$$

[6] 固有値と単一モード条件

$B > 0$ だから $\arctan B$ は $(-\pi/2, \pi/2)$ にあり、$\tan A = B$ は

$$F(\beta) = A(\beta) - \arctan B(\beta) = m\pi, \qquad m \in \mathbb{Z} \tag{10}$$

と同値である。許容区間 $k_0 n_1 < \beta < k_0 n_2$ で A は減少し、B は増加するため F は単調減少する。端点極限は

$$\lim_{\beta \to k_0 n_1 +} F(\beta) = A_{\max} = k_0 d\sqrt{n_2^2 - n_1^2} > 0, \tag{11}$$

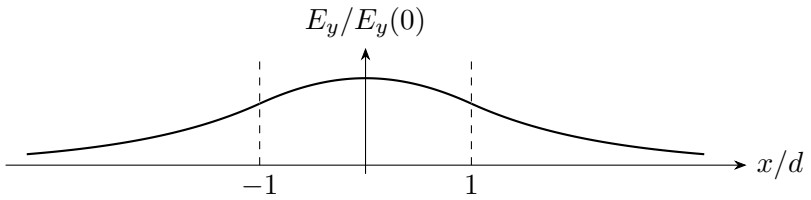
$$\lim_{\beta \to k_0 n_2 -} F(\beta) = -\frac{\pi}{2}. \tag{12}$$

よって $F = 0$ を満たす偶対称モードは必ず少なくとも 1 つある。F の値域に π が含まれるのは $A_{\max} > \pi$ のときで、その場合にはもう 1 つの偶モードが存在する。従って偶モードが 1 つだけとなる正確な条件は

$$\boxed{k_0 d\sqrt{n_2^2 - n_1^2} \leq \pi.} \tag{13}$$

等号では $F = \pi$ は $\beta = k_0 n_1$ という許容区間外の端でしか達しないため、追加の減衰束縛モードはない。

単一モード時はコア内に節のない偶関数形となり、両クラッドへ指数関数的に減衰する。図では横座標を x/d、縦座標を $E_y/E_y(0)$ とし、例として $kd = \kappa d = \pi/4$ を選ぶ。この組は界面条件 $k\tan(kd) = \kappa$ を満たし、上で定めた $A = kd = \pi/4$、$B = \kappa/k = 1$ に対応する（例えば $\beta d = 2$ とすれば、対応する屈折率比も $n_1 < n_2$ となる）。


$E_y/E_y(0)$
x/d
-1
1