物理工学専攻院試解答集
2013 年度物理学 II 第 2 問

政岡凜太郎

[1] Bose–Einstein 分布

エネルギー E の一粒子状態の平均占有数は

$$\boxed{f_{BE}(E) = \frac{1}{\exp[(E-\mu)/(k_B T)] - 1}.} \tag{1}$$

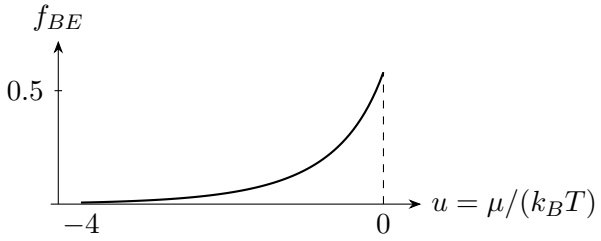
最低エネルギーを $E_0 = 0$ としたので、基底状態も含めて分母を正に保つには $\mu < 0$ が必要である。凝縮相の熱力学極限では $\mu \to 0^-$ を考え、励起状態 $E > 0$ の分布には $\mu = 0$ を用いる。この極限で基底状態の占有数は発散するため、凝縮粒子数は励起状態の分布と分けて数える。

[2] μ への依存

E と $T > 0$ を固定すると

$$\frac{\partial f_{BE}}{\partial \mu} = \frac{e^{(E-\mu)/(k_B T)}}{k_B T \left(e^{(E-\mu)/(k_B T)} - 1\right)^2} > 0, \tag{2}$$

なので f_{BE} は μ とともに単調に増加する。以下は例として $E > 0$ かつ $E/(k_B T) = 1$ の概形である。許される $\mu \leq 0$ では $\mu = 0$ に有限値で近づく。基底状態 $E = 0$ では $\mu \to 0^-$ で発散する。



[3] 状態密度

運動量空間でエネルギーが E 以下の領域は半径 $\sqrt{2mE}$ の球である。スピン縮退がなく、状態を位相空間体積 h^3 ごとに数えると

$$\mathcal{N}(E) = \frac{V}{h^3}\frac{4\pi}{3}(2mE)^{3/2} = \frac{V}{6\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} E^{3/2}, \tag{3}$$

$$D(E) = \frac{d\mathcal{N}}{dE} = \boxed{\frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} E^{1/2}.} \tag{4}$$

[4] 励起粒子数の上限

固定した E で占有数は μ とともに増すから、励起状態の粒子数は $\mu = 0$ で最大となる。$\beta = 1/(k_B T)$ とし $x = \beta E$ と変数変換すると

$$N_t^{\max} = \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}(k_B T)^{3/2}\int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{e^x - 1}\,dx \tag{5}$$

$$= \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}(k_B T)^{3/2}\Gamma(3/2)\zeta(3/2) \tag{6}$$

$$= \boxed{V\zeta(3/2)\left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}.} \tag{7}$$

従って $T \to 0$ で $N_t^{\max} \to 0$ となる。

[5] 臨界温度

臨界点では励起状態に全粒子を収容できる限界に達し、$N = N_t^{\max}(T_c)$ である。よって

$$\boxed{T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B}\left[\frac{N}{V\zeta(3/2)}\right]^{2/3}.} \tag{8}$$

[6] 凝縮成分

有限系での基底占有数は $N_0 = f_{BE}(0) = [\exp(-\mu/k_B T) - 1]^{-1}$ だから、$\mu = -k_B T \ln(1 + 1/N_0)$ である。$T < T_c$ では余剰粒子が基底状態を巨視的に占め、熱力学極限で $N_0 \to \infty$ とともに $\mu \to 0^-$ となる。この極限で励起状態の分布に $\mu = 0$ を代入すると、その粒子数は $N_t^{\max}(T)$ に飽和する。残り

$$N_0 = N - N_t^{\max}(T) \tag{9}$$

は $E = 0$ の基底状態を巨視的に占める。したがって $E > 0$ の連続状態の積分だけで凝縮粒子数を数えない。

[7] 全エネルギーと定積熱容量

基底状態のエネルギーを 0 とすると、全エネルギーは励起状態の寄与だけである。

$$U = \int_0^\infty E D(E) f_{BE}(E)\,dE \tag{10}$$

$$= \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}(k_B T)^{5/2}\int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^x - 1}\,dx \tag{11}$$

$$= \boxed{\frac{3}{2}V\zeta(5/2)\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}(k_B T)^{5/2}.} \tag{12}$$

固定 N, V で微分する。凝縮相では $\mu = 0$ であり、励起状態の U は上式の温度依存だけを持つため

$$\boxed{C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{N,V} = \frac{15}{4}Vk_B\zeta(5/2)\left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}.} \tag{13}$$

[8] 液体 ^{4}He の数値評価

数密度を質量密度から求めると

$$n = \frac{N}{V} = \frac{1.5 \times 10^2}{6.7 \times 10^{-27}} = 2.24 \times 10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}. \tag{14}$$

臨界温度は

$$T_c = \frac{2\pi(1.1 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s})^2}{(6.7 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg})(1.4 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K})} \left(\frac{2.24 \times 10^{28}\,\mathrm{m}^{-3}}{2.61}\right)^{2/3} = 3.40\ \mathrm{K}. \tag{15}$$

有効数字 1 桁では $\boxed{T_c \simeq 3\ \mathrm{K}}$ である。

[9] 理想気体模型との違い

実際の液体ヘリウムでは原子間相互作用を無視できず、相関のある液体となる。ここで用いた理想気体は相互作用を全く含まないため、その臨界温度は実験の超流動転移温度と一致する必要はない。