物理工学専攻院試解答集
2013 年度物理学 II 第 1 問

政岡凜太郎

生成・消滅演算子を用いると

$$\hat{X} = x_0(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \qquad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}, \qquad \hat{H}_0 = \hbar\omega_0 \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right). \tag{1}$$

[1] 双極子遷移

$\hat{\mu} = q\hat{X}$ だから、数状態間の行列要素は

$$\langle l|\hat{\mu}|n\rangle = qx_0 \left(\sqrt{n}\,\delta_{l,n-1} + \sqrt{n+1}\,\delta_{l,n+1}\right). \tag{2}$$

従って $n \geq 1$ なら $|n-1\rangle, |n+1\rangle$ へ遷移でき、基底状態 $|0\rangle$ からは $|1\rangle$ だけが許される。

[2] 四次摂動によるエネルギー補正

一次摂動論では $\Delta E_n = \langle n|\lambda\hat{X}^4|n\rangle$ である。$Q = \hat{a} + \hat{a}^\dagger$ とおき、問題文の昇降作用を 2 回用いると

$$Q^2|n\rangle = \sqrt{n(n-1)}|n-2\rangle + (2n+1)|n\rangle + \sqrt{(n+1)(n+2)}|n+2\rangle. \tag{3}$$

$n < 2$ のとき最初の項はなく、負の添字の状態は含めない。Q は Hermite であり、異なる数状態は直交するので、

$$\begin{aligned}\langle n|Q^4|n\rangle &= \|Q^2|n\rangle\|^2 &(4)\\ &= n(n-1) + (2n+1)^2 + (n+1)(n+2) &(5)\\ &= 6n^2 + 6n + 3. &(6)\end{aligned}$$

したがって

$$\boxed{\Delta E_n = 3\lambda(2n^2 + 2n + 1)\left(\frac{\hbar}{2m\omega_0}\right)^2.} \tag{7}$$

[3] 摂動後の双極子遷移

摂動を一次まで含む規格化固有状態は

$$|n\rangle' = |n\rangle + \frac{\lambda x_0^4}{\hbar\omega_0} \sum_{\substack{k\neq n \\ |k-n|\in\{2,4\}}} \frac{\langle k|Q^4|n\rangle}{n-k}|k\rangle + O(\lambda^2), \qquad Q = \hat{a} + \hat{a}^\dagger. \tag{8}$$

四次演算子は偶数準位だけを混ぜるので、$|8\rangle'$ と反対パリティの状態だけが双極子遷移の候補となる。さらに Q は準位を 1 つだけ変えるため、候補は $l = 3, 5, 7, 9, 11, 13$ である。ただし候

補範囲だけでは行列要素の非零性は決まらない。$Q_{lk} = \langle l|Q|k\rangle$ と書く。Q を 4 回作用させると、非対角行列要素は

$$(Q^4)_{n+2,n} = (4n+6)\sqrt{(n+1)(n+2)}, \tag{9}$$

$$(Q^4)_{n+4,n} = \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \qquad (n \geq 0) \tag{10}$$

となる。準位を下げる行列要素は、これらの実行列要素の添字を交換して得られる。$\eta = \lambda x_0^4/(\hbar\omega_0)$ とすると、一次遷移振幅は

$$\frac{\langle l'|q\hat{X}|8'\rangle}{qx_0} = Q_{l8} + \eta\left[\sum_{k\neq l}\frac{(Q^4)_{kl}Q_{k8}}{l-k} + \sum_{k\neq 8}\frac{Q_{lk}(Q^4)_{k8}}{8-k}\right] + O(\eta^2). \tag{11}$$

$l = 13$ では一次補正に寄与するのは、終状態の $|9\rangle$ 成分と初期状態の $|12\rangle$ 成分だけである。その二項は

$$\frac{\sqrt{13}\,(Q^4)_{12,8}}{4} + \frac{\sqrt{13}\,(Q^4)_{12,8}}{-4} = 0. \tag{12}$$

上の角括弧内の二つの総和へ行列要素を代入する。各行で左の加数が終状態の補正、右の加数が初期状態の補正からの寄与である。

$$l = 3: \quad -2\sqrt{105} + 2\sqrt{105} = 0, \tag{13}$$

$$l = 5: \quad -61\sqrt{21} + 65\sqrt{21} = 4\sqrt{21}, \tag{14}$$

$$l = 7: \quad -153\sqrt{8} + 105\sqrt{8} = -48\sqrt{8}, \tag{15}$$

$$l = 9: \quad 408 - 570 = -162, \tag{16}$$

$$l = 11: \quad 69\sqrt{110} - 66\sqrt{110} = 3\sqrt{110}. \tag{17}$$

従って $l = 3$ でも一次振幅が消える。残る 4 つの振幅は

$$\frac{\langle 5'|q\hat{X}|8'\rangle}{qx_0} = 4\sqrt{21}\,\eta + O(\eta^2), \qquad \frac{\langle 7'|q\hat{X}|8'\rangle}{qx_0} = \sqrt{8}(1-48\eta) + O(\eta^2), \tag{18}$$

$$\frac{\langle 9'|q\hat{X}|8'\rangle}{qx_0} = 3(1-54\eta) + O(\eta^2), \qquad \frac{\langle 11'|q\hat{X}|8'\rangle}{qx_0} = 3\sqrt{110}\,\eta + O(\eta^2). \tag{19}$$

従って求める遷移先は

$$\boxed{|5\rangle',\ |7\rangle',\ |9\rangle',\ |11\rangle'.} \tag{20}$$

[4] Heisenberg 表示の位置演算子

$[\hat{H}_0, \hat{a}] = -\hbar\omega_0\hat{a}$、$[\hat{H}_0, \hat{a}^\dagger] = \hbar\omega_0\hat{a}^\dagger$ より

$$\hat{a}(t) = e^{-i\omega_0 t}\hat{a}(0), \qquad \hat{a}^\dagger(t) = e^{i\omega_0 t}\hat{a}^\dagger(0). \tag{21}$$

従って

$$\hat{X}(t) = x_0\left(e^{-i\omega_0 t}\hat{a}(0) + e^{i\omega_0 t}\hat{a}^\dagger(0)\right) \tag{22}$$

$$= \boxed{\hat{X}(0)\cos(\omega_0 t) + \frac{\hat{P}(0)}{m\omega_0}\sin(\omega_0 t).} \tag{23}$$

[5] 位置の期待値

数状態では $\langle n|\hat{X}(0)|n\rangle = \langle n|\hat{P}(0)|n\rangle = 0$ なので

$$\boxed{\langle n|\hat{X}(t)|n\rangle = 0.} \tag{24}$$

有限振幅で振動する例は、$\hat{a}$ の固有状態である規格化コヒーレント状態

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle, \qquad \hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \tag{25}$$

である。この状態では

$$\boxed{\langle\alpha|\hat{X}(t)|\alpha\rangle = 2x_0\,\mathrm{Re}\left(\alpha e^{-i\omega_0 t}\right),} \tag{26}$$

となり、$\alpha \neq 0$ なら有限の振幅で角振動数 ω_0 の正弦振動をする。