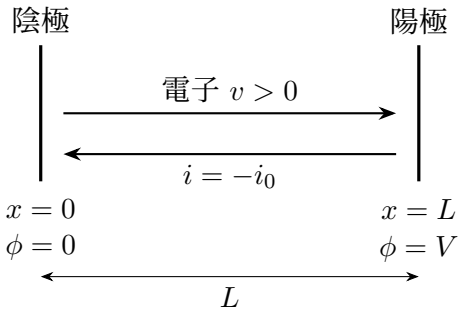
物理工学専攻院試解答集
2013 年度物理学 I 第 2 問

政岡凜太郎

陰極を $x=0$、陽極を $x=L$ とし、電位差を $V>0$ とする。電子は陰極から陽極へ進む一方、慣用電流は逆向きである。原本の装置を一次元で表すと次のようになる。



[1] 電子の速度

電子が陰極を出るときの運動エネルギーを無視できる。電荷 $-e$ の電位エネルギーは $-e\phi$ なので、陰極から x までのエネルギー保存は

$$\frac{1}{2}mv(x)^2 - e\phi(x) = 0. \tag{1}$$

従って陽極向きを正とする速度は

$$\boxed{v(x) = \sqrt{\frac{2e\phi(x)}{m}}}. \tag{2}$$

[2] 定常電流

電荷保存則は $\partial\rho/\partial t + \partial i/\partial x = 0$ である。定常状態では $\partial\rho/\partial t = 0$ だから $\partial i/\partial x = 0$、すなわち i は一定である。電子数密度を $n>0$、速度を $v>0$ とすると電子の電荷は $-e$ なので

$$i = -env = -i_0, \qquad i_0 > 0. \tag{3}$$

[3] 電位の微分方程式

定常電流から $n = i_0/(ev)$ であり、これを Poisson 方程式 $\epsilon_0\phi'' = en$ に代入すると

$$\phi''(x) = \frac{i_0}{\epsilon_0 v(x)} = \frac{i_0}{\epsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}\,\phi(x)^{-1/2}. \tag{4}$$

従って

$$\boxed{A = \frac{i_0}{\epsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}, \qquad \alpha = -\frac{1}{2}.} \tag{5}$$

[4] 電位分布

$A>0$ であり、$x>0$ では ϕ は増加する。右辺の $\phi^{-1/2}$ は陰極端 $\phi=0$ で定義されないので、微分方程式は $x>0$ で積分し、$x\to 0^{+}$ で $\phi,\phi'\to 0$ を課して積分定数を定める。微分方程式に ϕ' を掛けると

$$\frac{1}{2}\bigl(\phi'(x)\bigr)^{2} = 2A\sqrt{\phi(x)}, \qquad \phi'(x) = 2\sqrt{A}\,\phi(x)^{1/4}. \tag{6}$$

この式をさらに積分して

$$\frac{4}{3}\phi(x)^{3/4} = 2\sqrt{A}\,x \tag{7}$$

を得る。よって陰極境界を満たす電位は

$$\boxed{\phi(x) = \left(\frac{9A}{4}\right)^{2/3} x^{4/3} = \left[\frac{9i_0}{4\epsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}\right]^{2/3} x^{4/3}.} \tag{8}$$

実際、この解は $\phi(0)=0$ および $\phi'(0)=0$ を満たし、$x>0$ で $\phi''>0$ となる。ただし $\phi''(x)=\frac{4}{9}(9A/4)^{2/3}x^{-2/3}$ は $x\to 0^{+}$ で発散する。したがって微分方程式は $x>0$ で用い、陰極での電位と電場の条件は $x\to 0^{+}$ の極限として課している。

[5] 電流電圧則

陽極で $\phi(L)=V$ とおくと、電位分布を i_0 について解いて

$$\boxed{i_0 = \frac{4}{9}\epsilon_0\sqrt{\frac{2e}{m}}\,\frac{V^{3/2}}{L^{2}}.} \tag{9}$$

これは平板真空ダイオードの空間電荷制限電流密度である。i_0 は電圧の $3/2$ 乗に比例し、電極間隔の二乗に反比例する。符号付き慣用電流は $i=-i_0$ である。