物理工学専攻院試解答集
2012 年度物理学 I 第 1 問

政岡凜太郎

幾何と記号

円板の中心を原点 O、糸の固定端を $A=(a,0)$ とする。円板と糸の接点を Q とし、OQ が正の x 軸となす反時計回りの角を φ とする。糸が伸びず、円板に沿って巻きつくので、円板上の糸の長さは $a\varphi$ である。したがって、Q から質点までの自由な糸の長さは

$$\ell(\varphi)=\ell_0-a\varphi \tag{1}$$

となる。以下は衝突前の $\ell>0$ に対する議論である。半径方向と接線方向の単位ベクトルを

$$\boldsymbol{e}_r=\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{e}_\varphi=\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix} \tag{2}$$

と定める。自由な糸は Q から $\boldsymbol{e}_\varphi$ の方向に伸び、張力はその逆方向に働く。

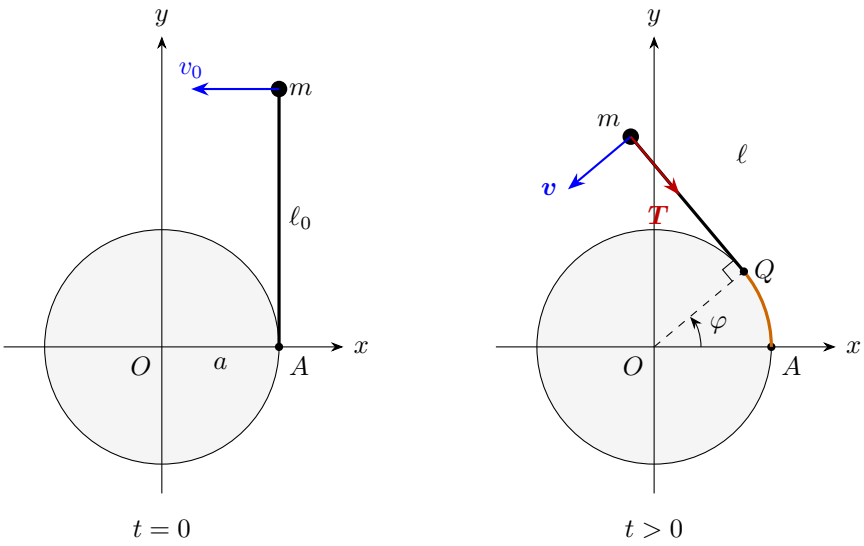


図 1: 左は初期状態、右は巻きつく途中の模式図。右の速度は $-\boldsymbol{e}_r$ 方向、張力は $-\boldsymbol{e}_\varphi$ 方向を向く。太い弧は巻きついた糸を表す。表示例では $\varphi=40°$、$\ell_0/a=2.2$ とし、寸法比の予測には用いない。

[1] エネルギーと角運動量の保存

位置は $\boldsymbol{r}=a\boldsymbol{e}_r+\ell\boldsymbol{e}_\varphi$ と表せる。$\dot\ell=-a\dot\varphi$、$\dot{\boldsymbol{e}}_r=\dot\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$、$\dot{\boldsymbol{e}}_\varphi=-\dot\varphi\boldsymbol{e}_r$ を用いて微分すると、$a\dot\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$ と $\dot\ell\boldsymbol{e}_\varphi=-a\dot\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$ が打ち消し合う。したがって速度は $\boldsymbol{v}=-\ell\dot\varphi\boldsymbol{e}_r$ である。張力は糸に沿うので $\boldsymbol{T}=-T\boldsymbol{e}_\varphi$ であり、速度と直交する。したがって張力の仕事率は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m}{2}|\boldsymbol{v}|^2\right)=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v}=0 \tag{3}$$

である。他に力は働かないため、運動エネルギーは保存する。

一方、張力の作用線は接線 Q–質点に沿い、原点 O を通らない。その作用線と O との距離は a であるため、O まわりのモーメントは時計回りの $N = -aT$ となり、ゼロではない。したがって O まわりの角運動量は保存しない。

[2] 位置、速度、角運動量

式(1)と接線の向きから、位置は

$$\boxed{\boldsymbol{r} = a\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix} + (\ell_0 - a\varphi)\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}.} \tag{4}$$

ここで

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} = \dot\varphi\boldsymbol{e}_\varphi, \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\varphi}{\mathrm{d}t} = -\dot\varphi\boldsymbol{e}_r, \qquad \dot\ell = -a\dot\varphi \tag{5}$$

なので、

$$\boldsymbol{v} = a\dot\varphi\boldsymbol{e}_\varphi - a\dot\varphi\boldsymbol{e}_\varphi - \ell\dot\varphi\boldsymbol{e}_r \tag{6}$$

$$= \boxed{-\ell\dot\varphi\boldsymbol{e}_r.} \tag{7}$$

接点 Q の移動による接線方向の成分が、自由な糸の短縮による成分と打ち消し合う。このため質点の速度は自由な糸と直交する。

$\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\varphi$ の z 成分が 1 であることを用いると、

$$L = m(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})_z = m(a\boldsymbol{e}_r + \ell\boldsymbol{e}_\varphi)\times(-\ell\dot\varphi\boldsymbol{e}_r)\big|_z \tag{8}$$

$$= \boxed{m\ell^2\dot\varphi = m(\ell_0 - a\varphi)^2\dot\varphi.} \tag{9}$$

[3] 角度の時間発展と衝突時刻

エネルギー保存から $|\boldsymbol{v}| = \ell|\dot\varphi| = v_0$ である。$t = 0$ では $\varphi = 0$、速度は負の x 方向なので、$\boldsymbol{v}(0) = (-\ell_0\dot\varphi(0), 0) = (-v_0, 0)$ より $\dot\varphi(0) > 0$ である。衝突前には $\ell > 0$ かつ速さがゼロにならないため、$\dot\varphi$ の符号は変わらない。したがって、

$$\dot\varphi = \frac{v_0}{\ell_0 - a\varphi}. \tag{10}$$

$\varphi(0) = 0$ を使って積分すると

$$\int_0^{\varphi(t)} (\ell_0 - au)\,\mathrm{d}u = \int_0^t v_0\,\mathrm{d}s, \qquad \ell_0\varphi - \frac{a}{2}\varphi^2 = v_0 t. \tag{11}$$

二次方程式の二つの解のうち、$t = 0$ で $\varphi = 0$ となる枝を選べば、

$$\boxed{\varphi(t) = \frac{\ell_0 - \sqrt{\ell_0^2 - 2av_0t}}{a}.} \tag{12}$$

このとき $\ell(t) = \sqrt{\ell_0^2 - 2av_0t}$ である。糸が巻きつき終わるのは $\ell = 0$ のときなので、

$$\boxed{\tau = \frac{\ell_0^2}{2av_0}, \qquad \varphi(\tau) = \frac{\ell_0}{a}.} \tag{13}$$

運動と力の式の適用範囲は $0 \le t < \tau$ であり、τ は衝突前の運動から求めた終端時刻である。

[4] 張力と運動の物理的解釈

$\ell\dot{\varphi} = v_0$ を [2] の速度に代入すると、$\boldsymbol{v} = -v_0\boldsymbol{e}_r$ となる。これを時間微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -v_0\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi = -\frac{v_0^2}{\ell}\boldsymbol{e}_\varphi. \tag{14}$$

質点に働く力は張力だけなので、

$$\boxed{\boldsymbol{T} = -\frac{mv_0^2}{\ell_0 - a\varphi}\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}, \qquad |\boldsymbol{T}| = \frac{mv_0^2}{\ell_0 - a\varphi}.} \tag{15}$$

張力は質点から Q に向かい、速度と直交するため、速さを変えずに進行方向を曲げる。等速円運動の向心力 mv_0^2/R と比較すると、瞬間的な曲率半径は $R = \ell$ である。質点から加速度の方向に距離 ℓ 進んだ点が Q なので、微小時間では、Q を瞬間的な曲率中心とする半径 ℓ の等速円運動として解釈できる。ただし Q は円周上を動き、ℓ も短くなるため、全軌道は一つの固定された円にはならない。

$t \to \tau^-$ では $\ell \to 0$ となり、理想化した模型の張力は発散する。衝突後の運動はこの解の範囲に含めない。

[5] 張力のモーメントと角運動量の変化

$\boldsymbol{T} = -(mv_0^2/\ell)\boldsymbol{e}_\varphi$ より、

$$N = (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{T})_z \tag{16}$$

$$= \left[(a\boldsymbol{e}_r + \ell\boldsymbol{e}_\varphi)\times\left(-\frac{mv_0^2}{\ell}\boldsymbol{e}_\varphi\right)\right]_z \tag{17}$$

$$= \boxed{-\frac{mav_0^2}{\ell_0 - a\varphi}.} \tag{18}$$

一方、$L = m\ell^2\dot{\varphi} = mv_0\ell$ なので、

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = mv_0\dot{\ell} = -mav_0\dot{\varphi} = -\frac{mav_0^2}{\ell} = N. \tag{19}$$

初期値は $L(0) = mv_0\ell_0 > 0$、$N < 0$ であり、角運動量は減少する。また、mv_0^2/ℓ は力の単位、mav_0^2/ℓ はモーメントの単位になっている。

物理工学専攻院試解答集
2012 年度物理学 I 第 2 問

政岡凜太郎

[1] 電子の散乱模型

散乱直後から次の散乱までの時間を t とする。この間、電場を $\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{e}_z$ と書けば、電子の電荷が符号付きの q であることから

$$m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = qE, \qquad v_z(t) = \frac{qE}{m}t \quad (0 \le t < 2\tau). \tag{1}$$

散乱周期 2τ で平均すると

$$\boxed{v_a = \frac{1}{2\tau}\int_0^{2\tau} v_z(t)\,\mathrm{d}t = \frac{qE\tau}{m}.} \tag{2}$$

電子の数密度は n なので電流密度は $j_z = nqv_a$ であり、電荷の符号を含めて

$$\boldsymbol{j} = \frac{nq^2\tau}{m}\boldsymbol{E} = \sigma\boldsymbol{E}, \qquad \boxed{\sigma = \frac{nq^2\tau}{m}}. \tag{3}$$

円柱の断面積は πa^2 だから、$I = j_z\pi a^2$、電圧の大きさは $V = EL$ である。したがって

$$I = \frac{nq^2\tau\pi a^2}{mL}V = \frac{\sigma\pi a^2}{L}V, \tag{4}$$

となり、電流は電圧に比例する。

単位時間・単位体積あたりに電場が電子へ与える仕事は

$$J = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E} = \sigma E^2 = \boxed{\frac{I^2}{\sigma\pi^2 a^4}}. \tag{5}$$

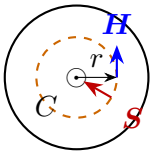
一方、電子 1 個は一周期の終わりに速さ $|qE|2\tau/m$ となり、その運動エネルギーを散乱ごとに失う。散乱頻度は $1/(2\tau)$ なので、単位体積・単位時間あたりの損失は

$$n\frac{1}{2\tau}\frac{m}{2}\left(\frac{2qE\tau}{m}\right)^2 = \frac{nq^2\tau}{m}E^2 = \sigma E^2 = J. \tag{6}$$

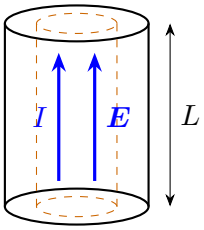
電場が電子にする仕事が、散乱で失われる運動エネルギーに変わる。

[2] 電磁場のエネルギー流

円柱軸を $+z$ 方向、横断面の極座標の方位角方向を $\boldsymbol{e}_\theta$ とする。問題の定常電流は $+z$ 向きである。長い導体の中央部を考え、端の影響を無視する。軸方向の電流に対して、局所オーム則 $\boldsymbol{j} = \sigma\boldsymbol{E}$ から電場も軸方向となる。軸対称な定常場を $\boldsymbol{E} = E_z(r)\boldsymbol{e}_z$ と書けば、$\nabla\times\boldsymbol{E} = 0$ の方位角成分は $-\partial_r E_z = 0$ だから、電場の大きさは横断面で一定である。磁場はこの直線状の円柱電流が作る場であり、右ねじの向きの方位角方向を向く。その大きさを、以下でアンペールの法則から求める。



横断面（⊙: $+z$ 向き）



軸方向

図 1: 横断面で $+z$ 方向電流は紙面手前向き。磁場は方位角方向、エネルギー流は半径内向きである。軸方向図は導体と領域 C の同軸関係を示す。

[2.1] 一様な導体

半径 $r < a$ の円周を貫く電流は $I(r) = \sigma E \pi r^2$ である。アンペールの法則 $\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = I(r)$ より

$$\boldsymbol{H}(r) = \frac{\sigma E r}{2} \boldsymbol{e}_\theta. \tag{7}$$

したがって $\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_\theta = -\boldsymbol{e}_r$ を使うと

$$\boxed{\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = -\frac{\sigma E^2 r}{2} \boldsymbol{e}_r, \qquad |\boldsymbol{S}| = \frac{\sigma E^2 r}{2}.} \tag{8}$$

エネルギーは導体表面から中心へ向かって流れる。

[2.2] 半径 r の円柱領域

領域 C の側面積は $2\pi r L$ である。両端面では $\boldsymbol{S}$ が面に平行なので流束はなく、側面を通って C へ入る電力は

$$P_{\mathrm{in}} = |\boldsymbol{S}| \, 2\pi r L = \pi r^2 L \sigma E^2. \tag{9}$$

体積 $\pi r^2 L$ の領域内で発生するジュール熱は

$$P_{\mathrm{J}} = \int_C \sigma E^2 \, \mathrm{d}V = \pi r^2 L \sigma E^2 = P_{\mathrm{in}}. \tag{10}$$

定常状態では領域内に電磁エネルギーが蓄積しないため、流入した電磁エネルギーが同じ領域内のジュール熱に変わる。

[2.3] 半径に依存する電気伝導率

定常場では磁束密度 $\boldsymbol{B}$ が時間に依存せず、$\partial \boldsymbol{B}/\partial t = 0$ なので、ファラデーの法則から $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0$ である。軸方向の場を $\boldsymbol{E} = E_z(r) \boldsymbol{e}_z$ と書くと、その方位角成分は

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E})_\theta = -\frac{\partial E_z}{\partial r} = 0. \tag{11}$$

従って電場は半径にも依存しない。以下ではこの一様な値を E と書く。局所オーム則から

$$\boldsymbol{j}(r) = \sigma(r) E \boldsymbol{e}_z. \tag{12}$$

全電流を導体断面で積分すると

$$I = 2\pi E \int_0^a r' \sigma(r') \, \mathrm{d}r', \qquad \boxed{j(r) = \frac{\sigma(r) I}{2\pi \displaystyle\int_0^a r' \sigma(r') \, \mathrm{d}r'}.} \tag{13}$$

半径 r 以内を流れる電流は $I(r) = 2\pi E \int_0^r r'\sigma(r')\,\mathrm{d}r'$ だから、アンペールの法則から

$$H_\theta(r) = \frac{E}{r}\int_0^r r'\sigma(r')\,\mathrm{d}r', \qquad \boldsymbol{S}(r) = -\frac{E^2}{r}\left(\int_0^r r'\sigma(r')\,\mathrm{d}r'\right)\boldsymbol{e}_r. \tag{14}$$

側面を通じて領域 C に流入する電力は

$$P_{\mathrm{in}} = |\boldsymbol{S}(r)|\,2\pi r L = 2\pi L E^2 \int_0^r r'\sigma(r')\,\mathrm{d}r'. \tag{15}$$

これに対し、C 内で発生するジュール熱は

$$P_{\mathrm{J}} = \int_C \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}V = 2\pi L E^2 \int_0^r r'\sigma(r')\,\mathrm{d}r' = P_{\mathrm{in}}. \tag{16}$$

よって導電率が半径方向に変わっても、電磁エネルギーの流入と局所的なジュール発熱は領域ごとに一致する。

半径依存の式は $0 < r < a$ で、示した積分が存在する範囲で成り立つ。中心での場の極限は $\sigma(r)$ の振る舞いにも依存する。例えば軸近傍で $0 \le \sigma(r) \le \sigma_{\max}$ と有界なら

$$0 \le \int_0^r r'\sigma(r')\,\mathrm{d}r' \le \frac{\sigma_{\max} r^2}{2}, \qquad |H_\theta(r)| \le \frac{|E|\sigma_{\max} r}{2}, \qquad |\boldsymbol{S}(r)| \le \frac{E^2\sigma_{\max} r}{2}. \tag{17}$$

従ってこの条件下では両者が $r \to 0$ で 0 に近づき、中心の方位角・半径方向が一意に定まらなくても場のベクトルは連続に 0 へ延長できる。一様導体もこの場合に含まれる。

物理工学専攻院試解答集
2012 年度物理学 II 第 1 問

政岡凜太郎

以下、計算基底を

$$\big(|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle\big) \tag{1}$$

の順に並べる。原本 [3] の回転因子では $\hbar$ による除算が抜けている。指数を無次元にするため、以下では $J_z/\hbar$ を含む因子として読む。

[1] スピン角運動量の行列

昇降演算子の作用を $J=1$ に適用すると

$$J_+ = \sqrt{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_- = \sqrt{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

$J_x = (J_+ + J_-)/2$、$J_y = (J_+ - J_-)/(2i)$、および $J_z|1,m\rangle = m\hbar|1,m\rangle$ から

$$\boxed{J_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}, \qquad \boxed{J_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}}, \qquad \boxed{J_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}. \tag{3}$$

これらは Hermite 行列であり、例えば $[J_x, J_y] = i\hbar J_z$ を満たす。さらに $J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 = 2\hbar^2 I$ なので、全状態で $J^2 = 1(1+1)\hbar^2$ となる。

[2] 静磁場中のエネルギー準位

$\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_z$ だから、

$$H_M = -\gamma B J_z = -\gamma B\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

従って磁気量子数 m ごとの固有エネルギーは

$$\boxed{E_m = -\gamma B m\hbar \quad (m = 1, 0, -1)}. \tag{5}$$

順に $-\gamma B\hbar, 0, +\gamma B\hbar$ であり、最低状態は $|1,1\rangle$ である。隣り合う準位間隔は $\gamma B\hbar$ なので、共鳴条件は $\omega = \gamma B$。

[3] 共鳴交流磁場中の状態

問題が与える回転系の近似 Hamiltonian は $H_{\mathrm{RF}} = -\gamma B_{\mathrm{RF}} J_x$ である。原本の記号に従い、回転系の状態を $|\Psi(t)\rangle$、実験室系の状態を $|\phi(t)\rangle$ とする。原本 [3] の回転変換を次元の合う形に直

すと

$$|\Psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\omega t J_z\right)|\phi(t)\rangle. \tag{6}$$

以下で解くのは H_{RF} による回転系の状態 $|\Psi(t)\rangle$ である。$\Omega = \gamma B_{\mathrm{RF}}$、$\theta = \Omega t$ と置くと、時間発展演算子は

$$U(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_{\mathrm{RF}}t\right) = \exp\left(i\theta\frac{J_x}{\hbar}\right). \tag{7}$$

[1] の行列を掛けると $J_x^3 = \hbar^2 J_x$ となる。従って指数関数の級数で奇数次と偶数次の項をそれぞれまとめれば

$$U(t) = I + i\sin\theta\,\frac{J_x}{\hbar} + (\cos\theta - 1)\left(\frac{J_x}{\hbar}\right)^2. \tag{8}$$

最低状態 $|1,1\rangle$ はこの基底で $(1,0,0)^{\mathsf{T}}$ なので、

$$U(t)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(1+\cos\theta)/2\\ i\sin\theta/\sqrt{2}\\ (\cos\theta-1)/2\end{pmatrix}. \tag{9}$$

よって回転系の状態は

$$\boxed{|\Psi(t)\rangle = \frac{1+\cos\theta}{2}|1,1\rangle + \frac{i\sin\theta}{\sqrt{2}}|1,0\rangle + \frac{\cos\theta-1}{2}|1,-1\rangle.} \tag{10}$$

実験室系の状態は $|\phi(t)\rangle = \exp(i\omega t J_z/\hbar)|\Psi(t)\rangle$ から得る。回転変換は J_z と可換なので、J_z の期待値は両系で一致する。実際、回転系振幅の絶対値二乗は

$$\frac{(1+\cos\theta)^2}{4} + \frac{\sin^2\theta}{2} + \frac{(\cos\theta-1)^2}{4} = 1 \tag{11}$$

となる。各磁気量子数の確率はこの三項であり、J_z の期待値は

$$\langle J_z\rangle = \hbar\big(|c_1|^2 - |c_{-1}|^2\big) \tag{12}$$

$$= \boxed{\hbar\cos(\gamma B_{\mathrm{RF}}t)}. \tag{13}$$

初期値は $+\hbar$、周期は $2\pi/(\gamma B_{\mathrm{RF}})$ である。

[4] 相互作用による一次のエネルギー補正

演算子は

$$H_Q = A(2J_x^2 - J_y^2 - J_z^2) = A(3J_x^2 - J^2). \tag{14}$$

設問 [1] の行列から

$$J_x^2 = \frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}, \qquad J^2 = 2\hbar^2 I, \tag{15}$$

従って

$$H_Q = A\hbar^2\begin{pmatrix}-1/2&0&3/2\\0&1&0\\3/2&0&-1/2\end{pmatrix}. \tag{16}$$

H_M は $B>0$ で非縮退なので、一次のエネルギー補正は各 $|1,m\rangle$ における対角成分である。

$$\Delta E_1 = -\frac{A\hbar^2}{2}, \qquad \Delta E_0 = A\hbar^2, \qquad \Delta E_{-1} = -\frac{A\hbar^2}{2}. \tag{17}$$

よって一次近似の準位は

$$\boxed{E_1 = -\gamma B\hbar - \frac{A\hbar^2}{2}, \quad E_0 = A\hbar^2, \quad E_{-1} = +\gamma B\hbar - \frac{A\hbar^2}{2}.} \tag{18}$$

問題の弱摂動条件 $A\hbar^2 \ll \gamma B\hbar$ のもとでは準位の順序は変わらない。

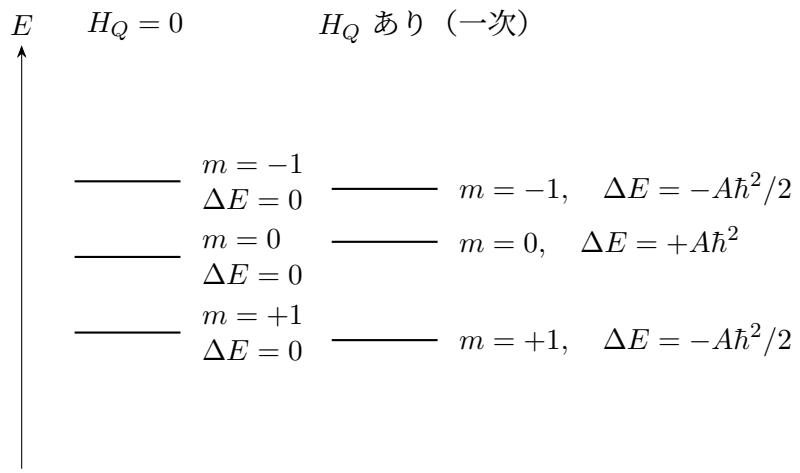


図 1: 未摂動準位と相互作用による一次の準位移動。縦軸は $\gamma B\hbar$ で規格化した模式図で、表示例は $A\hbar/(\gamma B) = 1/5$ とする。

物理工学専攻院試解答集
2012 年度物理学 II 第 2 問

政岡凜太郎

[1] 相互作用のない一次元気体

まず粒子 1 個の分配関数を求める。長さ L の一次元箱では状態数を位相空間体積 h ごとに数えるので、運動量積分から

$$Z_1 = \frac{1}{h}\int_0^L \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p\, \exp\left(-\frac{p^2}{2mk_BT}\right) \tag{1}$$

$$= \frac{L}{h}\sqrt{2\pi m k_B T} = \frac{L}{\lambda}, \qquad \lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_BT}}. \tag{2}$$

N 個は同種粒子なので、同じ配置を粒子ラベルの $N!$ 通りだけ重複して数えないようにする。従って気体 A の分配関数は

$$\boxed{Z_A = \frac{Z_1^N}{N!} = \frac{1}{N!}\left(\frac{L}{\lambda}\right)^N.} \tag{3}$$

[2] 自由エネルギー

Helmholtz 自由エネルギーは $F = -k_BT\ln Z_A$ だから

$$F(T,L) = -Nk_BT\ln\frac{L}{\lambda} + k_BT\ln N! \tag{4}$$

$$\simeq -Nk_BT\ln\frac{L}{\lambda} + Nk_BT\ln N - Nk_BT \tag{5}$$

$$= \boxed{Nk_BT\left[\ln\left(\frac{N\lambda}{L}\right) - 1\right].} \tag{6}$$

ここでは原本の $N \gg 1$ と Stirling 近似を用いた。

[3] 化学ポテンシャル

温度と長さを固定して粒子数で微分する。N は巨視的な系の連続変数として扱うため、

$$\boxed{\mu(T,L) = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,L} = k_BT\ln\left(\frac{N\lambda}{L}\right).} \tag{7}$$

[4] Boltzmann 統計の希薄条件

並進運動のエネルギーは $E = p^2/(2m) \geq 0$ であるため、Boltzmann 占有数は最も低いエネルギーで最大となる。基準を $E_0 = 0$ とすれば

$$\bar{n}_{\max} = \exp\left(\frac{\mu}{k_B T}\right) = \frac{N\lambda}{L}. \tag{8}$$

したがって全ての一粒子準位の占有数が十分小さいための条件は

$$\boxed{\frac{N\lambda}{L} \ll 1, \qquad \frac{L}{N} \gg \lambda.} \tag{9}$$

λ は長さの次元を持ち、温度 T における熱的 de Broglie 波長を表す。L/N は 1 粒子あたりの平均間隔なので、条件は粒子間隔が波長より十分大きいことを意味する。波動性が粒子の重なりに強く影響しない希薄な領域で、各量子状態の平均占有数を小さく保てる。

[5] 剛体斥力のある一次元気体

粒子中心を $x_1 < \cdots < x_N$ の順に並べる。壁との条件は $d/2 \leq x_1$、$x_N \leq L - d/2$、隣り合う粒子には $x_{i+1} - x_i \geq d$ を課す。隣接粒子ごとに重なる排除長を取り除く座標

$$y_i = x_i - (i-1)d \tag{10}$$

を導入すると、壁と粒子間の条件は $d/2 \leq y_1 \leq \cdots \leq y_N \leq L - Nd + d/2$ となる。この区間の長さは $L - Nd$ で、座標変換の Jacobian は 1 である。順序付き領域は長さ $L - Nd$ の直積領域の $1/N!$ を占めるので、配置積分は $(L - Nd)^N/N!$ となる。同じ順序を既に選んでいるため、さらに $N!$ で割ることはしない。運動量積分は気体 A と同じだから

$$\boxed{Z_B = \frac{1}{N!}\left(\frac{L - Nd}{\lambda}\right)^N.} \tag{11}$$

この結果から

$$F_B = -k_B T \ln Z_B \simeq N k_B T \left[\ln\left(\frac{N\lambda}{L - Nd}\right) - 1\right], \tag{12}$$

$$P = -\left(\frac{\partial F_B}{\partial L}\right)_{T,N} = \boxed{\frac{N k_B T}{L - Nd}}. \tag{13}$$

気体 A では $P_A = N k_B T/L$ である。斥力のある気体 B では使える長さが $L - Nd$ に減るため、同じ T, N, L でも圧力は大きい。得た古典的な剛体棒模型の式を設問の希薄条件 $L \gg Nd$ の外まで形式的に延ばすと、$L \to Nd + 0$ で圧力が発散する。ただしこの高密度極限では古典近似自体の適用も別途確かめる必要がある。$d \to 0$ の極限では気体 A の状態方程式を再現する。

物理工学専攻院試解答集
2012 年度物理学 II 第 3 問

政岡凜太郎

全設問で時間依存を $e^{-i\omega t}$ とする。$\boldsymbol{H}$ は y 成分のみを持ち、電場は x, z 成分を持つ TM 波である。媒質 j では $\boldsymbol{D} = \epsilon_j \boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$。

[1] 全反射と真空中の減衰波

電場は電荷のない一様媒質中で $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0$ を満たす。Faraday 則 $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = i\omega \boldsymbol{B}$ と Ampère 則 $\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = -i\omega \boldsymbol{D}$ を用いると、

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{E}) = i\omega\mu_0 \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \mu_0 \epsilon_j \omega^2 \boldsymbol{E}, \tag{1}$$

$$-\Delta \boldsymbol{E} = \mu_0 \epsilon_j \omega^2 \boldsymbol{E}. \tag{2}$$

よって平面波の波数は $k_x^2 + k_z^2 = \epsilon_j \mu_0 \omega^2$ に従う。媒質 1 では $\epsilon_1 \mu_0 = n^2/c^2$ だから、入射波の z 成分は

$$\boxed{k_1 = \sqrt{\frac{n^2\omega^2}{c^2} - k_x^2}}. \tag{3}$$

真空側の場 $e^{ik_x x - \kappa_2 z}$ を平面波の式に代入すると、z 波数は $i\kappa_2$ であるため

$$k_x^2 - \kappa_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \qquad \boxed{\kappa_2 = \sqrt{k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}}. \tag{4}$$

入射側に伝播波があり $k_1 > 0$、透過側で減衰するため $\kappa_2 > 0$ でなければならない。従って

$$\boxed{\frac{\omega}{c} < k_x < \frac{n\omega}{c}}. \tag{5}$$

下端は真空側の減衰条件、上端は媒質 1 側の入射波の伝播条件から来る。端点ではそれぞれ $\kappa_2 = 0$ または $k_1 = 0$ となるので、指定された狭義の条件には含まれない。

[2] 媒質間の無反射透過

平面波 $e^{i(k_x x + k_j z)}$ では $\boldsymbol{k}_j = (k_x, 0, k_j)$ である。$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 0$ より

$$k_x E_{j,x} + k_j E_{j,z} = 0, \qquad E_{j,z} = -\frac{k_x}{k_j} E_{j,x}. \tag{6}$$

また $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = i\omega\mu_0 \boldsymbol{H}$ の y 成分をとると

$$k_j E_{j,x} - k_x E_{j,z} = \omega\mu_0 H_{j,y}, \tag{7}$$

$$\omega\mu_0 H_{j,y} = \frac{k_x^2 + k_j^2}{k_j} E_{j,x} = \frac{\epsilon_j \mu_0 \omega^2}{k_j} E_{j,x}. \tag{8}$$

したがって各媒質の電場・磁場比は

$$\boxed{\zeta_j = \frac{E_{j,x}}{H_{j,y}} = \frac{k_j}{\epsilon_j \omega}}. \tag{9}$$

反射がないとき接線成分 E_x, H_y は界面で連続なので $\zeta_1 = \zeta_2$、すなわち $k_1/\epsilon_1 = k_2/\epsilon_2$ である。分散関係

$$k_1^2 = \epsilon_1 \mu_0 \omega^2 - k_x^2, \qquad k_2^2 = \epsilon_2 \mu_0 \omega^2 - k_x^2 \tag{10}$$

を用いると

$$\frac{\epsilon_1 \mu_0 \omega^2 - k_x^2}{\epsilon_1^2} = \frac{\epsilon_2 \mu_0 \omega^2 - k_x^2}{\epsilon_2^2}, \tag{11}$$

$$\boxed{k_x^2 = \frac{\mu_0 \omega^2 \epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}}, \qquad \boxed{k_x = \omega \sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}}}. \tag{12}$$

この波数が入射側の伝播条件 $k_x^2 < \epsilon_1 \mu_0 \omega^2$ と透過側の条件 $k_x^2 < \epsilon_2 \mu_0 \omega^2$ を満たすことを確認できる。実際、$\epsilon_2 > \epsilon_1 > 0$ のとき比はそれぞれ $\epsilon_2/(\epsilon_1 + \epsilon_2) < 1$、$\epsilon_1/(\epsilon_1 + \epsilon_2) < 1$ であり、k_1, k_2 は正の実数となる。接線電場・磁場を同時に連続にするこの入射成分では、反射波の振幅はゼロとなる。

[3] 金属界面に束縛された波

$+x$ へ伝わる枝を選び、$k_x > 0$ とする。逆向きの枝は同じ分散を持つ $-k_x$ で表される。$z < 0$ の減衰因子は $e^{+\kappa_1 z} = e^{ik_{z,1} z}$ に対応し、$k_{z,1} = -i\kappa_1$。一方、$z > 0$ の因子 $e^{-\kappa_2 z}$ は $k_{z,2} = +i\kappa_2$ に対応する。各媒質の分散関係から

$$\kappa_1^2 = k_x^2 - \epsilon_0 \mu_0 \omega^2, \qquad \kappa_2^2 = k_x^2 - \epsilon_2 \mu_0 \omega^2 = k_x^2 + |\epsilon_2| \mu_0 \omega^2. \tag{13}$$

[2] で導いた $E_x/H_y = k_z/(\epsilon\omega)$ を両側に適用し、界面で接線成分を連続にすると

$$-\frac{i\kappa_1}{\epsilon_0 \omega} = \frac{i\kappa_2}{\epsilon_2 \omega}, \qquad \boxed{\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = \frac{\epsilon_0}{|\epsilon_2|}}. \tag{14}$$

この関係と分散関係を組み合わせれば

$$\frac{k_x^2 - \epsilon_0 \mu_0 \omega^2}{k_x^2 + |\epsilon_2| \mu_0 \omega^2} = \frac{\epsilon_0^2}{|\epsilon_2|^2}, \tag{15}$$

$$\boxed{k_x^2} = \frac{\mu_0 \omega^2 \epsilon_0 |\epsilon_2|}{|\epsilon_2| - \epsilon_0}, \tag{16}$$

$$\boxed{k_x} = \omega \sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_0 |\epsilon_2|}{|\epsilon_2| - \epsilon_0}}. \tag{17}$$

$|\epsilon_2| > \epsilon_0$ なので

$$\boxed{k_x = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{|\epsilon_2|}{|\epsilon_2| - \epsilon_0}} > \frac{\omega}{c}}. \tag{18}$$

この面内波数は真空中の伝播光の最大値 ω/c より大きい。したがってこのモードは界面に沿って進む一方、垂直方向には真空側・金属側の双方へ減衰する束縛波である。

[4] プリズムによる励起

真空中から金属表面へ直接入射する伝播光は、界面に平行な波数が $k_x \le \omega/c$ である。一方、[3] の表面波は $k_x > \omega/c$ を要するので、界面に平行な運動量が足りず、平坦な面では直接結合できない。

屈折率 $n_{\mathrm{p}} > 1$ のプリズムから界面の法線となす入射角 θ で光を入れると、界面に平行な波数は $k_x = n_{\mathrm{p}}(\omega/c)\sin\theta$ まで大きくなる。真空層との境界で全反射する角度を選べば、この高い面内波数を保ったエバネッセント場が真空ギャップへしみ出す。ギャップを金属表面の近くに狭く保つことで場が金属へ届き、さらに k_x を [3] の表面波波数に合わせればそのモードを励起できる。つまりプリズムは、全反射場を介して伝播光では得られない面内波数を供給し、金属界面の束縛モードとの運動量整合を可能にする。

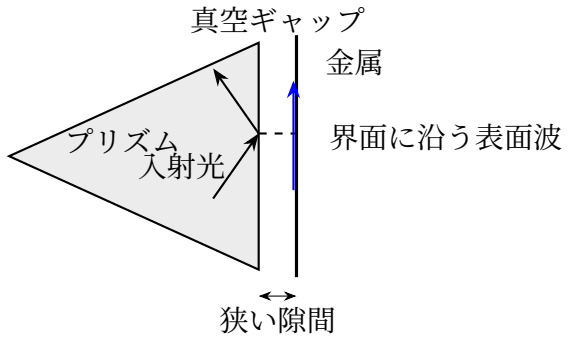


図 1: 全反射によるエバネッセント場を介したプリズム結合の模式図。点線はギャップ内にしみ出す場、青い矢印は金属界面に平行な表面波の進行方向を表す。入射角と長さは説明用で、臨界角や寸法を表さない。

物理工学専攻院試解答集
2012 年度物理学 II 第 4 問

政岡凜太郎

[1] 周期境界条件

周期境界条件では、原子軌道の添字 j と $j+M$ を同一視する。したがって、同じ軌道に掛かる Bloch 係数も一致しなければならず、

$$e^{ik(j+M)a} = e^{ikja}, \qquad e^{ikMa} = 1 \tag{1}$$

となる。この条件の下で Bloch 和は $\psi_k(x+Ma) = \psi_k(x)$ を満たす。従って許される波数は

$$\boxed{k = \frac{2\pi l}{Ma} \quad (l \in \mathbb{Z})}. \tag{2}$$

第一ブリルアン領域内では隣り合う波数の間隔は $2\pi/(Ma)$ である。

[2] 単元素鎖のエネルギー分散

問題文のシュレーディンガー方程式 (1) に ψ_k を代入し、$\phi_A^*(x)$ を掛けて積分する。運動エネルギー演算子を $T = -\hbar^2\partial_x^2/(2m)$ と書く。孤立原子の方程式から $\langle\phi_A|T+u(x)|\phi_A\rangle = E_A$ となる。隣接する二つの A 原子イオンのポテンシャルはそれぞれ β を与え、オンサイトのエネルギーは $E_A + 2\beta$ である。

右隣の軌道については、その原子の孤立方程式と軌道の直交性から

$$\int \phi_A^*(x)[T+u(x-a)]\phi_A(x-a)\,dx = E_A \int \phi_A^*(x)\phi_A(x-a)\,dx = 0. \tag{3}$$

したがって全ポテンシャルのうち原点の $u(x)$ が残す行列要素が、問題で定義された γ である。左隣も同様に γ を与え、両者には Bloch 位相 e^{ika} と e^{-ika} が付く。列挙外の積分は無視できるので

$$E(k) = E_A + 2\beta + \gamma(e^{ika} + e^{-ika}) \tag{4}$$

$$= \boxed{E_A + 2\beta + 2\gamma\cos(ka)}. \tag{5}$$

[3] 第一ブリルアン領域と安定性

孤立原子の準位 E_A は、真空準位を基準に束縛状態なら負である。隣接イオンの引力ポテンシャルによる対角シフト 2β も安定な結晶では一般に負となる。移動積分の符号はバンド底の位置を決める。安定な結合性の底端が $k=0$ にある場合は $\gamma < 0$ で、バンド底 $E_A + 2\beta + 2\gamma$ は上端 $E_A + 2\beta - 2\gamma$ より低い。バンド幅は $4|\gamma|$ である。

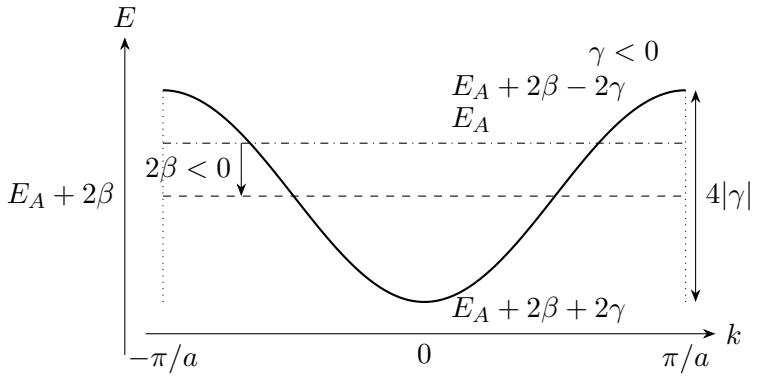


図 1: 単元素鎖の分散。縦方向は $|\gamma|$ を単位とする。表示例では $\gamma = -|\gamma|$ と $2\beta = -|\gamma|$ を選び、他のエネルギー比は示していない。

[4] 電子と正孔の有効質量

まず [3] の図と同じ $\gamma < 0$ の場合を考える。一つの軌道にスピンの異なる 2 個の電子を収容できるので、単位胞あたりの占有数 2 が満占有に対応する。バンド端近傍の曲率は

$$\frac{d^2E}{dk^2} = -2\gamma a^2 \cos(ka). \tag{6}$$

基底状態または低温の低エネルギーキャリアを考えると、平均占有数が 1 より十分小さいときの電子はバンド底 $k = 0$ の近くに入る。よって

$$\boxed{m_e^* = \frac{\hbar^2}{E''(0)} = \frac{\hbar^2}{-2\gamma a^2} > 0.} \tag{7}$$

同じ低エネルギー条件のもとで占有数が 2 に近いときは、バンド上端 $k = \pi/a$ 近くの空状態を正孔として扱う。電子の曲率は $E''(\pi/a) = 2\gamma a^2 < 0$ なので、正孔の質量はその負号付き逆数で

$$\boxed{m_h^* = -\frac{\hbar^2}{E''(\pi/a)} = -\frac{\hbar^2}{2\gamma a^2} > 0.} \tag{8}$$

この最近接余弦バンドでは両者の大きさが等しい。正孔質量の負号は、電子バンド頂の負曲率を正の正孔質量に変換するために必要である。$\gamma > 0$ ではバンド底と上端の位置が入れ替わり、電子は $k = \pi/a$、正孔は $k = 0$ の近くで評価する。したがって $\gamma \neq 0$ でのキャリア質量は、どちらも $\hbar^2/(2|\gamma|a^2)$ である。$\gamma = 0$ ではバンドが平坦となり、有限の曲率から質量を求めるこの式は使えない。

[5] 二原子分子鎖の固有値方程式

一単位胞の基底を ϕ_A, ϕ_B とする。原子 A の対角要素は $E_A + 2\beta$、隣の単位胞にある A 軌道との移動要素は [2] と Bloch 和により $2\gamma\cos(ka)$ となる。B 軌道の対角要素は E_B。A–B 間の要素にも運動エネルギーの寄与がある。[2] で定義した T を用い、同一分子内の軌道の重なりを $S_{AB} = \langle\phi_A|\phi_B\rangle$ と置く。原問では列挙されていない重なり積分を無視するので $S_{AB} \simeq 0$ である。孤立 A 原子の方程式 $(T + u)\phi_A = E_A\phi_A$ と Hermite 性から

$$\langle\phi_A|T + u|\phi_B\rangle = E_A S_{AB}, \tag{9}$$

$$\langle\phi_A|T + u + w|\phi_B\rangle = E_A S_{AB} + \langle\phi_A|w|\phi_B\rangle \simeq \delta. \tag{10}$$

孤立 B 原子の方程式から評価しても、同じ要素は $E_B S_{AB} + \langle \phi_A | u | \phi_B \rangle \simeq \delta$ となる。従って二つの等しいポテンシャル積分は、運動項を含む行列要素をそれぞれ評価するものである。係数 c_k, d_k は

$$\boxed{\begin{pmatrix} E_A + 2\beta + 2\gamma\cos(ka) & \delta \\ \delta & E_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_k \\ d_k \end{pmatrix} = E(k) \begin{pmatrix} c_k \\ d_k \end{pmatrix}.} \tag{11}$$

ここで行列は Hermite であり、固有値は実数となる。

[6] 混成バンド

$$\Delta = E_A - E_B + 2\beta \tag{12}$$

と置く。固有値方程式の行列式から

$$0 = [E_A + 2\beta + 2\gamma\cos(ka) - E][E_B - E] - \delta^2. \tag{13}$$

$$\boxed{\begin{aligned} E_\pm(k) = {} & \frac{E_A + E_B}{2} + \beta + \gamma\cos(ka) \\ & \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta}{2} + \gamma\cos(ka)\right)^2 + \delta^2}. \end{aligned}} \tag{14}$$

まず $\delta = 0$ なら、A 由来の余弦バンド $E_A + 2\beta + 2\gamma\cos(ka)$ と、分散のない B 準位 E_B が交差する。交差条件は $\Delta + 2\gamma\cos(ka) = 0$ である。$|\Delta| \ll |\gamma|$ では交差点が第一ブリルアン領域内にあり、$\Delta = 0$ なら $ka = \pm\pi/2$。一方 $|\Delta| \gg |\gamma|$ では両バンドの中心エネルギー差が A バンドの半幅より十分大きく、交差しない。

$\delta \neq 0$ は A と B の混成を生む。交差点近傍では固有値が分裂し、直接ギャップは $2|\delta|$ となる。$|\Delta| \gg |\gamma|$ では未混成準位差 $|\Delta + 2\gamma\cos(ka)|$ が全波数で $|\delta|$ より十分大きい。固有値方程式の二行から

$$\delta d_k = [E(k) - E_A - 2\beta - 2\gamma\cos(ka)]c_k, \qquad \delta c_k = [E(k) - E_B]d_k \tag{15}$$

となる。B に近い枝では $|c_k/d_k| \simeq |\delta/(\Delta + 2\gamma\cos(ka))| \ll 1$、A に近い枝では同様に $|d_k/c_k| \ll 1$ だから、各枝は主に元の A または B 軌道の性質を保つ。また固有値のずれは

$$\sqrt{\frac{[\Delta + 2\gamma\cos(ka)]^2}{4} + \delta^2} - \frac{|\Delta + 2\gamma\cos(ka)|}{2} \simeq \frac{\delta^2}{|\Delta + 2\gamma\cos(ka)|} \tag{16}$$

と小さい。これは下図の大離調での弱い準位移動にも対応する。

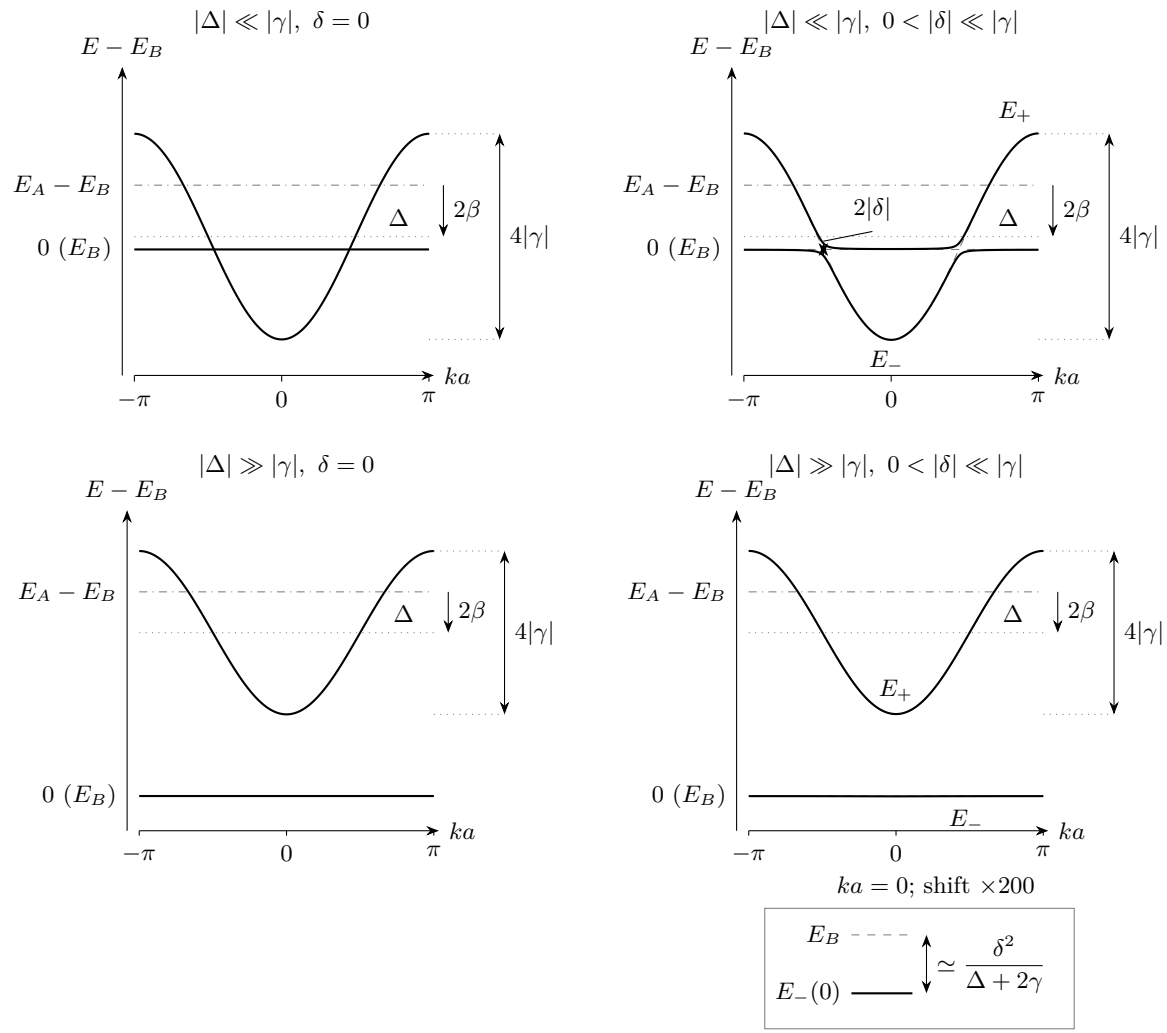


図 2: 混成の有無と離調の大小による分散。エネルギーは $|\gamma|$ を単位とし、E_B を基準とする。全図で $\gamma = -1$、$\beta = -0.5$、小離調は $\Delta = 0.25$、大離調は $\Delta = 4$ とした。有限混成の二図はともに $\delta = 0.12$。実線は固有エネルギー、破線は未混成 A バンドと B 準位、一点鎖線は孤立 A 準位、点線は A バンド中心を示す。矢印 2β は孤立 A 準位から中心への移動、$4|\gamma|$ は未混成 A バンドの幅である。右上は交差波数でのギャップ、右下の枠内は $ka = 0$ での B 由来準位の移動を縦に 200 倍拡大した図で、実線の位置は厳密な固有値から計算した。$\Delta < 0$ の大離調では上下のバンド順が逆になる。