物理工学専攻院試解答集
2012 年度物理学 I 第 2 問

政岡凜太郎

[1] 電子の散乱模型

散乱直後から次の散乱までの時間を t とする。この間、電場を $\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{e}_z$ と書けば、電子の電荷が符号付きの q であることから

$$m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = qE, \qquad v_z(t) = \frac{qE}{m}t \quad (0 \le t < 2\tau). \tag{1}$$

散乱周期 2τ で平均すると

$$\boxed{v_a = \frac{1}{2\tau}\int_0^{2\tau} v_z(t)\,\mathrm{d}t = \frac{qE\tau}{m}.} \tag{2}$$

電子の数密度は n なので電流密度は $j_z = nqv_a$ であり、電荷の符号を含めて

$$\boldsymbol{j} = \frac{nq^2\tau}{m}\boldsymbol{E} = \sigma\boldsymbol{E}, \qquad \boxed{\sigma = \frac{nq^2\tau}{m}}. \tag{3}$$

円柱の断面積は πa^2 だから、$I = j_z\pi a^2$、電圧の大きさは $V = EL$ である。したがって

$$I = \frac{nq^2\tau\pi a^2}{mL}V = \frac{\sigma\pi a^2}{L}V, \tag{4}$$

となり、電流は電圧に比例する。

単位時間・単位体積あたりに電場が電子へ与える仕事は

$$J = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E} = \sigma E^2 = \boxed{\frac{I^2}{\sigma\pi^2 a^4}}. \tag{5}$$

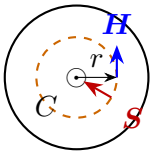
一方、電子 1 個は一周期の終わりに速さ $|qE|2\tau/m$ となり、その運動エネルギーを散乱ごとに失う。散乱頻度は $1/(2\tau)$ なので、単位体積・単位時間あたりの損失は

$$n\frac{1}{2\tau}\frac{m}{2}\left(\frac{2qE\tau}{m}\right)^2 = \frac{nq^2\tau}{m}E^2 = \sigma E^2 = J. \tag{6}$$

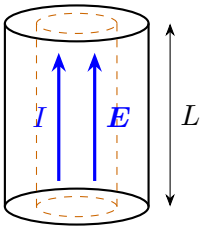
電場が電子にする仕事が、散乱で失われる運動エネルギーに変わる。

[2] 電磁場のエネルギー流

円柱軸を $+z$ 方向、横断面の極座標の方位角方向を $\boldsymbol{e}_\theta$ とする。問題の定常電流は $+z$ 向きである。長い導体の中央部を考え、端の影響を無視する。軸方向の電流に対して、局所オーム則 $\boldsymbol{j} = \sigma\boldsymbol{E}$ から電場も軸方向となる。軸対称な定常場を $\boldsymbol{E} = E_z(r)\boldsymbol{e}_z$ と書けば、$\nabla\times\boldsymbol{E} = 0$ の方位角成分は $-\partial_r E_z = 0$ だから、電場の大きさは横断面で一定である。磁場はこの直線状の円柱電流が作る場であり、右ねじの向きの方位角方向を向く。その大きさを、以下でアンペールの法則から求める。



横断面（⊙: $+z$ 向き）



軸方向

図 1: 横断面で $+z$ 方向電流は紙面手前向き。磁場は方位角方向、エネルギー流は半径内向きである。軸方向図は導体と領域 C の同軸関係を示す。

[2.1] 一様な導体

半径 $r < a$ の円周を貫く電流は $I(r) = \sigma E \pi r^2$ である。アンペールの法則 $\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = I(r)$ より

$$\boldsymbol{H}(r) = \frac{\sigma E r}{2} \boldsymbol{e}_\theta. \tag{7}$$

したがって $\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_\theta = -\boldsymbol{e}_r$ を使うと

$$\boxed{\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = -\frac{\sigma E^2 r}{2} \boldsymbol{e}_r, \qquad |\boldsymbol{S}| = \frac{\sigma E^2 r}{2}.} \tag{8}$$

エネルギーは導体表面から中心へ向かって流れる。

[2.2] 半径 r の円柱領域

領域 C の側面積は $2\pi r L$ である。両端面では $\boldsymbol{S}$ が面に平行なので流束はなく、側面を通って C へ入る電力は

$$P_{\mathrm{in}} = |\boldsymbol{S}| \, 2\pi r L = \pi r^2 L \sigma E^2. \tag{9}$$

体積 $\pi r^2 L$ の領域内で発生するジュール熱は

$$P_{\mathrm{J}} = \int_C \sigma E^2 \, \mathrm{d}V = \pi r^2 L \sigma E^2 = P_{\mathrm{in}}. \tag{10}$$

定常状態では領域内に電磁エネルギーが蓄積しないため、流入した電磁エネルギーが同じ領域内のジュール熱に変わる。

[2.3] 半径に依存する電気伝導率

定常場では磁束密度 $\boldsymbol{B}$ が時間に依存せず、$\partial \boldsymbol{B}/\partial t = 0$ なので、ファラデーの法則から $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0$ である。軸方向の場を $\boldsymbol{E} = E_z(r) \boldsymbol{e}_z$ と書くと、その方位角成分は

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E})_\theta = -\frac{\partial E_z}{\partial r} = 0. \tag{11}$$

従って電場は半径にも依存しない。以下ではこの一様な値を E と書く。局所オーム則から

$$\boldsymbol{j}(r) = \sigma(r) E \boldsymbol{e}_z. \tag{12}$$

全電流を導体断面で積分すると

$$I = 2\pi E \int_0^a r' \sigma(r') \, \mathrm{d}r', \qquad \boxed{j(r) = \frac{\sigma(r) I}{2\pi \displaystyle\int_0^a r' \sigma(r') \, \mathrm{d}r'}.} \tag{13}$$

半径 r 以内を流れる電流は $I(r) = 2\pi E \int_0^r r'\sigma(r')\,\mathrm{d}r'$ だから、アンペールの法則から

$$H_\theta(r) = \frac{E}{r}\int_0^r r'\sigma(r')\,\mathrm{d}r', \qquad \boldsymbol{S}(r) = -\frac{E^2}{r}\left(\int_0^r r'\sigma(r')\,\mathrm{d}r'\right)\boldsymbol{e}_r. \tag{14}$$

側面を通じて領域 C に流入する電力は

$$P_{\mathrm{in}} = |\boldsymbol{S}(r)|\,2\pi r L = 2\pi L E^2 \int_0^r r'\sigma(r')\,\mathrm{d}r'. \tag{15}$$

これに対し、C 内で発生するジュール熱は

$$P_{\mathrm{J}} = \int_C \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}V = 2\pi L E^2 \int_0^r r'\sigma(r')\,\mathrm{d}r' = P_{\mathrm{in}}. \tag{16}$$

よって導電率が半径方向に変わっても、電磁エネルギーの流入と局所的なジュール発熱は領域ごとに一致する。

半径依存の式は $0 < r < a$ で、示した積分が存在する範囲で成り立つ。中心での場の極限は $\sigma(r)$ の振る舞いにも依存する。例えば軸近傍で $0 \le \sigma(r) \le \sigma_{\max}$ と有界なら

$$0 \le \int_0^r r'\sigma(r')\,\mathrm{d}r' \le \frac{\sigma_{\max} r^2}{2}, \qquad |H_\theta(r)| \le \frac{|E|\sigma_{\max} r}{2}, \qquad |\boldsymbol{S}(r)| \le \frac{E^2\sigma_{\max} r}{2}. \tag{17}$$

従ってこの条件下では両者が $r \to 0$ で 0 に近づき、中心の方位角・半径方向が一意に定まらなくても場のベクトルは連続に 0 へ延長できる。一様導体もこの場合に含まれる。