# 物理工学専攻院試解答集
# 2012 年度物理学 I 第 1 問

政岡凜太郎

## 幾何と記号

円板の中心を原点 $O$、糸の固定端を $A=(a,0)$ とする。円板と糸の接点を $Q$ とし、$OQ$ が正の $x$ 軸となす反時計回りの角を $\varphi$ とする。糸が伸びず、円板に沿って巻きつくので、円板上の糸の長さは $a\varphi$ である。したがって、$Q$ から質点までの自由な糸の長さは

$$\ell(\varphi)=\ell_0-a\varphi \tag{1}$$

となる。以下は衝突前の $\ell>0$ に対する議論である。半径方向と接線方向の単位ベクトルを

$$\boldsymbol{e}_r=\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{e}_\varphi=\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix} \tag{2}$$

と定める。自由な糸は $Q$ から $\boldsymbol{e}_\varphi$ の方向に伸び、張力はその逆方向に働く。

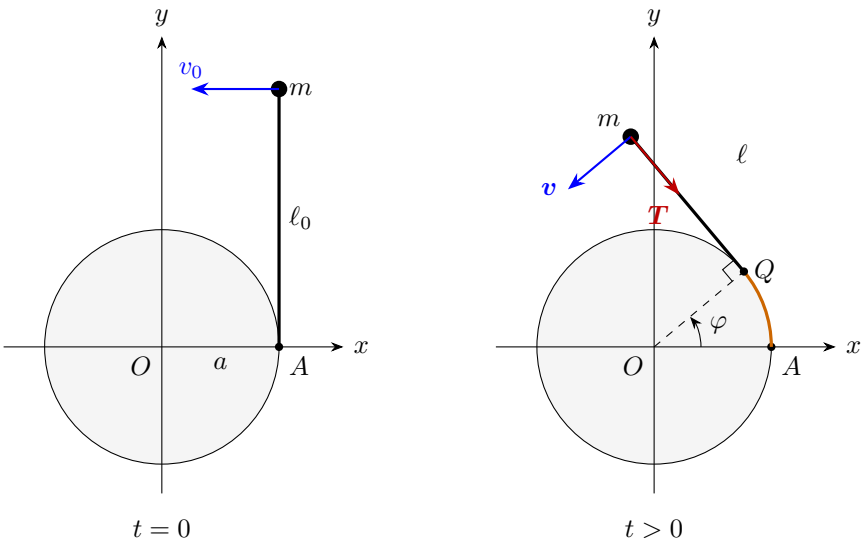



図 1: 左は初期状態、右は巻きつく途中の模式図。右の速度は $-\boldsymbol{e}_r$ 方向、張力は $-\boldsymbol{e}_\varphi$ 方向を向く。太い弧は巻きついた糸を表す。表示例では $\varphi=40°$、$\ell_0/a=2.2$ とし、寸法比の予測には用いない。

## [1] エネルギーと角運動量の保存

位置は $\boldsymbol{r}=a\boldsymbol{e}_r+\ell\boldsymbol{e}_\varphi$ と表せる。$\dot\ell=-a\dot\varphi$、$\dot{\boldsymbol{e}}_r=\dot\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$、$\dot{\boldsymbol{e}}_\varphi=-\dot\varphi\boldsymbol{e}_r$ を用いて微分すると、$a\dot\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$ と $\dot\ell\boldsymbol{e}_\varphi=-a\dot\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$ が打ち消し合う。したがって速度は $\boldsymbol{v}=-\ell\dot\varphi\boldsymbol{e}_r$ である。張力は糸に沿うので $\boldsymbol{T}=-T\boldsymbol{e}_\varphi$ であり、速度と直交する。したがって張力の仕事率は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m}{2}|\boldsymbol{v}|^2\right)=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v}=0 \tag{3}$$

である。他に力は働かないため、運動エネルギーは保存する。

一方、張力の作用線は接線 $Q$–質点に沿い、原点 $O$ を通らない。その作用線と $O$ との距離は $a$ であるため、$O$ まわりのモーメントは時計回りの $N = -aT$ となり、ゼロではない。したがって $O$ まわりの角運動量は保存しない。

## [2] 位置、速度、角運動量

式(1)と接線の向きから、位置は

$$\boxed{\boldsymbol{r} = a\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix} + (\ell_0 - a\varphi)\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}.} \tag{4}$$

ここで

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} = \dot\varphi\boldsymbol{e}_\varphi, \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\varphi}{\mathrm{d}t} = -\dot\varphi\boldsymbol{e}_r, \qquad \dot\ell = -a\dot\varphi \tag{5}$$

なので、

$$\boldsymbol{v} = a\dot\varphi\boldsymbol{e}_\varphi - a\dot\varphi\boldsymbol{e}_\varphi - \ell\dot\varphi\boldsymbol{e}_r \tag{6}$$

$$= \boxed{-\ell\dot\varphi\boldsymbol{e}_r.} \tag{7}$$

接点 $Q$ の移動による接線方向の成分が、自由な糸の短縮による成分と打ち消し合う。このため質点の速度は自由な糸と直交する。

$\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\varphi$ の $z$ 成分が 1 であることを用いると、

$$L = m(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})_z = m(a\boldsymbol{e}_r + \ell\boldsymbol{e}_\varphi)\times(-\ell\dot\varphi\boldsymbol{e}_r)\big|_z \tag{8}$$

$$= \boxed{m\ell^2\dot\varphi = m(\ell_0 - a\varphi)^2\dot\varphi.} \tag{9}$$

## [3] 角度の時間発展と衝突時刻

エネルギー保存から $|\boldsymbol{v}| = \ell|\dot\varphi| = v_0$ である。$t = 0$ では $\varphi = 0$、速度は負の $x$ 方向なので、$\boldsymbol{v}(0) = (-\ell_0\dot\varphi(0), 0) = (-v_0, 0)$ より $\dot\varphi(0) > 0$ である。衝突前には $\ell > 0$ かつ速さがゼロにならないため、$\dot\varphi$ の符号は変わらない。したがって、

$$\dot\varphi = \frac{v_0}{\ell_0 - a\varphi}. \tag{10}$$

$\varphi(0) = 0$ を使って積分すると

$$\int_0^{\varphi(t)} (\ell_0 - au)\,\mathrm{d}u = \int_0^t v_0\,\mathrm{d}s, \qquad \ell_0\varphi - \frac{a}{2}\varphi^2 = v_0 t. \tag{11}$$

二次方程式の二つの解のうち、$t = 0$ で $\varphi = 0$ となる枝を選べば、

$$\boxed{\varphi(t) = \frac{\ell_0 - \sqrt{\ell_0^2 - 2av_0t}}{a}.} \tag{12}$$

このとき $\ell(t) = \sqrt{\ell_0^2 - 2av_0t}$ である。糸が巻きつき終わるのは $\ell = 0$ のときなので、

$$\boxed{\tau = \frac{\ell_0^2}{2av_0}, \qquad \varphi(\tau) = \frac{\ell_0}{a}.} \tag{13}$$

運動と力の式の適用範囲は $0 \le t < \tau$ であり、$\tau$ は衝突前の運動から求めた終端時刻である。

## [4] 張力と運動の物理的解釈

$\ell\dot{\varphi} = v_0$ を [2] の速度に代入すると、$\boldsymbol{v} = -v_0\boldsymbol{e}_r$ となる。これを時間微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -v_0\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi = -\frac{v_0^2}{\ell}\boldsymbol{e}_\varphi. \tag{14}$$

質点に働く力は張力だけなので、

$$\boxed{\boldsymbol{T} = -\frac{mv_0^2}{\ell_0 - a\varphi}\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}, \qquad |\boldsymbol{T}| = \frac{mv_0^2}{\ell_0 - a\varphi}.} \tag{15}$$

張力は質点から $Q$ に向かい、速度と直交するため、速さを変えずに進行方向を曲げる。等速円運動の向心力 $mv_0^2/R$ と比較すると、瞬間的な曲率半径は $R = \ell$ である。質点から加速度の方向に距離 $\ell$ 進んだ点が $Q$ なので、微小時間では、$Q$ を瞬間的な曲率中心とする半径 $\ell$ の等速円運動として解釈できる。ただし $Q$ は円周上を動き、$\ell$ も短くなるため、全軌道は一つの固定された円にはならない。

$t \to \tau^-$ では $\ell \to 0$ となり、理想化した模型の張力は発散する。衝突後の運動はこの解の範囲に含めない。

## [5] 張力のモーメントと角運動量の変化

$\boldsymbol{T} = -(mv_0^2/\ell)\boldsymbol{e}_\varphi$ より、

$$N = (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{T})_z \tag{16}$$

$$= \left[(a\boldsymbol{e}_r + \ell\boldsymbol{e}_\varphi)\times\left(-\frac{mv_0^2}{\ell}\boldsymbol{e}_\varphi\right)\right]_z \tag{17}$$

$$= \boxed{-\frac{mav_0^2}{\ell_0 - a\varphi}.} \tag{18}$$

一方、$L = m\ell^2\dot{\varphi} = mv_0\ell$ なので、

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = mv_0\dot{\ell} = -mav_0\dot{\varphi} = -\frac{mav_0^2}{\ell} = N. \tag{19}$$

初期値は $L(0) = mv_0\ell_0 > 0$、$N < 0$ であり、角運動量は減少する。また、$mv_0^2/\ell$ は力の単位、$mav_0^2/\ell$ はモーメントの単位になっている。