XY 模型とくりこみ群

政岡凜太郎

1. 離散微分幾何

まず d 次元格子は d 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ に埋め込まれた点の集合であるが、多くの格子模型においては各点の座標の情報は不要であり、どの点とどの点が隣接しているかのみが重要である。より一般には点だけでなく辺、面など高次元の隣接関係も重要となるので、以下のように d 次元格子を再定義しよう:

d 次元格子とは 0 次元胞体 (点)、1 次元胞体、(辺)、2 次元胞体 (面)、...、d 次元胞体の集合であり、構造として境界作用素 ∂ が入っているようなものである (数学では CW 複体と呼ばれる)。境界作用素 ∂ は p 次元胞体に対して $(p-1)$ 次元胞体の整数係数の形式的な線形結合を与える線形作用素である。境界作用素の詳細な定義は省略するが、低次元の図形の場合には我々の直感から明らかである (そして多くの物理の問題では低次元の図形しか扱わない)。

このノートでは格子 Λ における p 次元胞体の集合を $V_p(\Lambda)$ で表す。p 次元胞体の形式的な線形結合

$$f = \sum_{i \in V_p(\Lambda)} f(i) i \tag{1}$$

を p-形式と呼ぶ。これは微分形式の言葉遣いの濫用だが、こうすると格子系と連続極限をとった場の理論を並行に議論できるため便利である。線形結合の係数は場合によって $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ などである。例えば 0-形式は格子点 x に対して係数 $\phi(x)$ を与えるスカラー関数とみなせる。また 1-形式は各辺 e 上に割り当てられた係数 $A(e)$ によって定められる。これもスカラー関数に思われるかもしれないが、辺 e が向きをもつため、$A(e)$ は辺上の流れの密度として解釈される。p-形式 f, g の間の内積を

$$(f, g) := \sum_{i \in V_p} f^*(i) g(i) \tag{2}$$

によって定める。次に格子上の外微分 d を

$$\mathrm{d} := \partial^\dagger \tag{3}$$

によって定義する。Hermite 共役は標準的な基底 (点、辺、面、...) による成分表示での共役転置として行う。すると $(p+1)$-形式 M と p-形式 f に対して Stokes の定理

$$\int_{\partial M} f := (\partial M, f) = (M, \mathrm{d}f) =: \int_M \mathrm{d}f \tag{4}$$

が成り立つ。格子余微分は $\mathrm{d}^\dagger = \partial$ である。また格子 Laplacian を

$$\Delta := \mathrm{d}\mathrm{d}^\dagger + \mathrm{d}^\dagger\mathrm{d} = \partial^\dagger\partial + \partial\partial^\dagger \tag{5}$$

によって定義する。これは 2 次元格子の場合にはグラフ Laplacian と呼ばれる。離散の世界で微分幾何の概念が全てうまく定義できるわけではないことに注意。例えば、wedge 積や Hodge star は定義はできなくはないが、良い性質をもつわけではない。

2. XY 模型

Λ を 2 次元格子とする。Λ 上の XY 模型の作用は

$$S[\theta] = -\beta \sum_{e \in V_1(\Lambda)} \cos(\mathrm{d}\theta(e)) = -\beta \sum_{\langle x,y \rangle \in V_1(\Lambda)} \cos(\theta(x) - \theta(y)) \tag{6}$$

によって与えられる。ここで V_1 は辺の集合であり、$\langle x, y \rangle$ は頂点 x, y をつなぐ辺を表す。また θ は $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ を係数にもつ 0-形式とする。分配関数は

$$Z = \int \mathcal{D}\theta \exp\left(\beta \sum_{e \in V_1} \cos(\mathrm{d}\theta(e))\right), \quad \int \mathcal{D}\theta := \prod_{x \in V_0} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta(x) \tag{7}$$

となる。

高温展開

XY 模型の分配関数を

$$Z = \int \mathcal{D}\theta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\beta}{2} \sum_{e \in V_1} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{d}\theta(e)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathrm{d}\theta(e)})\right)^n \tag{8}$$

と書く。ここで $\mathcal{D}\theta := \prod_{x\in V_0} \mathrm{d}\theta(x)/2\pi$ である。$\beta \ll 1$ の高温領域において、β についての最低次の寄与を取り出すと $Z=1$ である。次に相関関数

$$
\begin{aligned}
&\langle \cos(\theta(x)-\theta(y))\rangle = \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(x)-\mathrm{i}\theta(y)}\rangle = \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y,\theta)}\rangle \\
&= \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}\theta\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y,\theta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{\beta}{2}\sum_{e\in V_1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{d}\theta(e)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathrm{d}\theta(e)})\right)^n \\
&= \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}\theta\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y,\theta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{\beta}{2}\sum_{e\in V_1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\partial e,\theta)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\partial e,\theta)})\right)^n
\end{aligned} \tag{9}
$$

を考える。

$$
\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ 0 & (n\neq 0) \end{cases} \tag{10}
$$

から、展開したときに指数関数の肩が相殺するものだけが生き残る。n 次の展開係数において指数関数の肩は

$$
\mathrm{i}(x-y\pm\partial e_1\pm\partial e_2\pm\cdots\pm\partial e_n,\theta) =: \mathrm{i}(x-y+\partial\Gamma,\theta) \tag{11}
$$

と表される。ここでの $x-y$ は座標の差ではなく、2 つの点の形式的線形結合である点に注意。この寄与が非ゼロになる条件は $\partial\Gamma = y-x$ である。よって生き残るのは x と y をつなぐような曲線である。β の最低次では、x と y をつなぐ最短経路が主要な寄与を与える。よって

$$
\langle \cos(\theta(x)-\theta(y))\rangle \propto \left(\frac{\beta}{2}\right)^{d(x,y)} = \exp\left(-\frac{d(x,y)}{\xi}\right), \quad \xi = \ln\frac{2}{\beta} \tag{12}
$$

となる。ここで $d(x,y)$ は格子上での x と y の間の距離を表す。よって高温では相関関数は指数減衰することが分かる。

低温展開

XY 模型の作用は cos が入っていて扱いにくいので、cos を Taylor 展開して

$$
\begin{aligned}
S[\theta] \approx -\beta\sum_{e\in V_1}\left(1-\frac{1}{2}\mathrm{d}\theta(e)^2\right) &= \frac{\beta}{2}(\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}\theta)+\mathrm{const.} \\
&= \frac{\beta}{2}(\theta,\Delta\theta)+\mathrm{const.}
\end{aligned} \tag{13}
$$

とする。ここで θ が 0-形式なことから $\mathrm{d}^\dagger\mathrm{d}\theta = \Delta\theta$ となることを用いた。さらに $\theta\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ であることを忘れ、$\theta\in\mathbb{R}$ として扱う。低温では θ がほとんど一方向を向く

ため、θ の値域のトポロジカルな構造は無視してよい。すると作用 (13) は自由ボソン場 (Gaussian 模型) の作用に一致する。自由ボソンについて、Wick の定理から

$$
\begin{aligned}
\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(\theta(x)-\theta(y))}\rangle &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!}(\mathrm{i}\alpha)^{2m}\langle(\theta(x)-\theta(y))^{2m}\rangle \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!}(\mathrm{i}\alpha)^{2m}\langle(\theta(x)-\theta(y))^{2}\rangle^{m} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\left(-\frac{\alpha^2}{2}\langle(\theta(x)-\theta(y))^2\rangle\right)^m \\
&= \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\langle(\theta(x)-\theta(y))^2\rangle\right) \\
&= \exp\left(\frac{\alpha^2}{\beta}(\Delta^{-1}(x,y)-\Delta^{-1}(0,0))\right) \qquad (14)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。この結果は Wick の定理を使わなくても求めることができる。まず

$$
\partial\Gamma = y - x, \quad \theta' = \theta - \frac{\mathrm{i}\alpha}{\beta}\Delta^{-1}\partial\Gamma \qquad (15)
$$

とおく。x, y は $\mathbb{R}^d$ の元ではなく、V_0 の元であることに注意。すると、平方完成により

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(\theta(x)-\theta(y))}\rangle = \langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha(\partial\Gamma,\theta)}\rangle \\
&= \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}\theta \exp\left(\frac{\beta}{2}(\theta,\Delta\theta) - \mathrm{i}\alpha(\partial\Gamma,\theta)\right) \\
&= \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}\theta \exp\left(\frac{\beta}{2}(\theta',\Delta\theta') + \frac{\alpha^2}{2\beta}(\partial\Gamma,\Delta^{-1}\partial\Gamma)\right) \\
&= \exp\left(\frac{\alpha^2}{\beta}\left(\Delta^{-1}(x,y)-\Delta^{-1}(\mathbf{0},\mathbf{0})\right)\right). \qquad (16)
\end{aligned}
$$

まず $\Delta^{-1}(\mathbf{0},\mathbf{0})$ については Fourier 変換を用いて

$$
\begin{aligned}
\Delta^{-1}(\mathbf{0},\mathbf{0}) &= -\sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathrm{BZ} \\ \boldsymbol{k}\neq 0}} \frac{1}{L^d\sum_{i=1}^d(1-\cos k_i)} \\
&\approx \int_{\mathrm{BZ}\setminus\{\mathbf{0}\}} \frac{\mathrm{d}^d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^d}\frac{2}{\boldsymbol{k}^2} \qquad (17)
\end{aligned}
$$

となる。$d \geq 2$ の場合には $L \to \infty$ において赤外の寄与が発散する。$d = 1$ の場合にオーダーを見積もると、

$$
\Delta^{-1}(\mathbf{0},\mathbf{0}) \sim \int_{1/L}^{1} \mathrm{d}k\frac{1}{k^2} \sim L \qquad (18)
$$

となる。また $d=2$ の場合は

$$\Delta^{-1}(\mathbf{0},\mathbf{0}) \sim \int_{1/L}^{1} \mathrm{d}k \frac{1}{k} \sim \log L \tag{19}$$

となる。次に $\Delta^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ の長距離の振る舞いを求める。離散的な場合も連続的な場合も Green 関数の長距離の性質は変わらないので、連続極限の Laplacian を使って良い。d 次元 Euclid 空間上 Laplacian の Green 関数は $d=1$ の場合

$$\Delta^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}{2}, \tag{20}$$

$d=2$ の場合

$$\Delta^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\frac{1}{2\pi} \ln |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|, \tag{21}$$

$d>2$ の場合

$$\Delta^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{2-d}}{(d-2)(2\pi)^{\frac{d}{2}}\Gamma(\frac{d}{2})}, \tag{22}$$

で与えられる。よって、$d=2$ の場合

$$\langle \cos(\theta(\boldsymbol{x})-\theta(\boldsymbol{y})) \rangle \sim |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{-1/2\pi\beta} \tag{23}$$

となる。したがって低温では相関関数がべき的に減衰することが分かる。高温相での相関関数は指数減衰であったから、両者の間に相転移が存在することが予想できる。この相転移は Beresinskii–Kosterlitz–Thouless (BKT) 転移と呼ばれる。

低温相の相関関数にはべきの指数が結合定数に依存するという特徴がある。これは BKT 転移の特徴と言っても良い。このように言うと、低温相で何か奇妙なことが起こっているように思われるかもしれないが、説明したように低温相は単なる自由ボソンで記述されるため、不思議なことは何もない。むしろ非自明なのは高温領域の方である。そもそも XY 模型には角度自由度を緩やかに捻ることで構成される南部 –Goldstone モードが存在するはずであり、相関関数のべき的な振る舞いは全く妥当なものである。しかし高温領域では何者かによってべき的秩序が破壊されてしまっている。ここで言う「何者か」とは、後で明らかにするように渦、あるいはトポロジカル欠陥である。

Villain 模型と Coulomb ガス

作用の低温展開 (13) は高温領域では定性的に誤った結果を与えてしまう。自由ボソン場による低温極限の問題点は作用が $\theta(x) \mapsto \theta(x) + 2\pi n(x),\ n(x) \in \mathbb{Z}$ に対して不変で

ないことである。ただし、単に自由ボソンに周期性を課す (コンパクト化すると言う) だけでは、BKT 転移は再現されない。ナイーブに差分を微分で置き換えて、微分の低次を抜き出すという有効理論の構成法では見逃していることがあるということだ。よってより精密な議論が必要になってくる。しかし XY 模型は作用が cos で表されており、$\theta(x)$ の高次の相互作用を含むため取り扱いが容易でない。そこで XY 模型と同じ普遍類に属しながら、作用が場の 2 次形式で表される模型として、Villain 模型を導入しよう。まず cos について、以下の周期性を保つ近似を用いる。

$$\mathrm{e}^{\beta\cos t} \approx \mathrm{e}^{\beta}\sum_{l\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}(t+2\pi l)^2}. \tag{24}$$

すると、$\mathbb{Z}$ 係数の 1-形式 $l : V_1 \to \mathbb{Z}$ を導入して、分配関数を以下のように書き直せる。

$$Z = \int \mathcal{D}\theta\,\mathcal{D}l \exp\left(-\frac{\beta}{2}\|\mathrm{d}\theta + 2\pi l\|^2\right) \tag{25}$$

ここで

$$\int \mathcal{D}\theta := \prod_{x\in V_0}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta(x)\,, \quad \int \mathcal{D}l := \prod_{e\in V_1}\sum_{l(e)\in\mathbb{Z}} \tag{26}$$

である。この模型は Villain 模型と呼ばれる。以下では Villain 模型を用いて XY 模型の性質を調べることにしよう。

まず Villain 模型を 1-形式 $A := \mathrm{d}\theta + 2\pi l$ によって記述することを考える。すると自由場の作用 $S = \beta\|A\|^2/2$ が得られるが、A に課される拘束条件に注意する必要がある。まず $\mathrm{d}A = 2\pi\mathrm{d}l$ から、A は 2π 単位の離散的な渦のみを許す。また非可縮な閉曲線 $\Gamma_i, i = 1, \dots, 2g$ に対し、

$$\oint_{\Gamma_i} A = (\Gamma, \mathrm{d}\theta) + 2\pi(\Gamma, l) = 2\pi(\Gamma, l) \in 2\pi\mathbb{Z} \tag{27}$$

が成り立つ。逆にこれらの性質が成り立つならば、基準点 x_0 における $\theta(x_0)$ を定め、そこから A を線積分することで $\theta(x)$ が一意に求まる。したがって分配関数は

$$Z = 2\pi \int \mathcal{D}A \prod_{i=1}^{2g}\delta_{2\pi\mathbb{Z}}(\Gamma_i, A)\prod_{f\in V_2}\delta_{2\pi\mathbb{Z}}(\mathrm{d}A(f))\mathrm{e}^{-\beta\|A\|^2/2} \tag{28}$$

となる。2π の因子は角度の並進 $\theta(x) \mapsto \theta(x) + \mathrm{const.}$ の自由度を考慮するために入れた。また

$$\delta_{2\pi\mathbb{Z}}(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta(t - 2\pi n) \tag{29}$$

である。

さらに Hodge 分解によって

$$A = \mathrm{d}\phi + \mathrm{d}^\dagger\psi + \omega \tag{30}$$

と表す。ω は調和形式であり、$\mathrm{d}\omega = 0,\ \mathrm{d}^\dagger\omega = 0$ を満たす。分配関数を今度は (ϕ, ψ, ω) で記述しよう。まず ϕ, ψ の不定性を利用することで、$\phi = \mathrm{d}^\dagger a, \psi = \mathrm{d}b$ と固定できる。すると ϕ は 0-調和形式、すなわち定数と直交する。したがって拘束条件

$$\sum_{x \in V_0} \phi(x) = 0 \tag{31}$$

が導かれる。次に $\psi = \mathrm{d}b$ も同様に調和形式と直交する。また $\mathrm{d}A = 2\pi q$ によって整数の場 q を導入すると、

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}\mathrm{d}^\dagger\psi = \Delta\psi = 2\pi q \tag{32}$$

より、$\psi = 2\pi\Delta^{-1}m$ と表せる。$\Delta\psi$ は調和形式と直交するので、q に関する中性条件

$$\sum_{f \in V_2} q(f) = 0 \tag{33}$$

が導かれる。

最後に ω は 1-調和形式であり、曲面の種数 g とすると $2g$ 個の基底が存在する。具体的に空間が $L \times L$ のトーラスの場合には

$$\omega_1(e_x) = \frac{1}{L}, \quad \omega_1(e_y) = 0 \tag{34}$$

$$\omega_2(e_x) = 0, \quad \omega_2(e_y) = \frac{1}{L} \tag{35}$$

が調和形式となる。e_x, e_y はそれぞれ x 方向と y 方向の任意の辺である。A に対する拘束条件から、A の調和形式成分 ω は ω_1, ω_2 の $2\pi\mathbb{Z}$ 係数の線形結合として

$$\omega = 2\pi \sum_i m_i \omega_i \tag{36}$$

と書ける。ここで $m_i \in \mathbb{Z}$ である。作用を ϕ, ψ, ω を用いて表示すると、

$$\begin{aligned}
S &= \frac{\beta}{2}\|\mathrm{d}\phi + \mathrm{d}^\dagger\psi + \omega\|^2 \\
&= \frac{\beta}{2}\left((\mathrm{d}\phi, \mathrm{d}\phi) + (\mathrm{d}^\dagger\psi, \mathrm{d}^\dagger\psi) + (\omega, \omega) + 2(\mathrm{d}\phi, \mathrm{d}^\dagger\psi) + 2(\mathrm{d}\phi, \omega) + 2(\mathrm{d}^\dagger\psi, \omega)\right) \\
&= \frac{\beta}{2}\left((\phi, \Delta\phi) + (\psi, \Delta\psi) + (\omega, \omega)\right) \\
&= \frac{\beta}{2}(\phi, \Delta\phi) + 2\pi^2\beta(q, \Delta^{-1}q) + 2\pi^2\beta\sum_i m_i^2
\end{aligned} \tag{37}$$

となる。

以上の議論により、分配関数は、

$$Z = 2\pi Z_\phi Z_q Z_\omega \tag{38}$$

と表される。ここで

$$Z_\phi = \int \mathcal{D}\phi \delta \left(\frac{1}{|V_0|} \sum_{x \in V_0} \phi(x) \right) \exp\left(-\frac{\beta}{2}(\phi, \Delta\phi) \right), \tag{39}$$

$$Z_q = \sum_{\{q\}} \delta \left(\sum_{f \in V_2} q(f) \right) \exp\left(-2\pi^2 \beta (q, \Delta^{-1} q) \right), \tag{40}$$

$$Z_\omega = \prod_{i=1,2} \left(\sum_{m_i \in \mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-2\pi\beta m_i^2} \right) \tag{41}$$

である。ただし Z_ω についてはトーラスの場合の式になっている。Z_ϕ は自由ボソンであり、先ほど調べた。また Z_ω は局所的な物理量を含まないため、大域的な演算子の期待値を計算しない限りは無視できる。Z_ϕ, Z_ω は相転移を起こさず、BKT 転移は Z_q によって引き起こされる。q を電荷と考えると、Z_q は Coulomb 相互作用する電子系の分配関数に等しく、BKT 転移は Coulomb 気体のプラズマ相転移とみなせる。

3. 繰り込み群

共形摂動論

くりこみ群の固定点は一般的に共形場理論になることが知られている。共形場理論の基本的なデータは演算子の共形次元と演算子積展開係数。演算子の相関関数は

$$\langle O_i(x) O_j(y) \rangle = \frac{\delta_{ij}}{|x-y|^{\Delta_i + \Delta_j}} \tag{42}$$

で与えられる。Δ_i が演算子の共形次元。次に演算子積展開は

$$O_i(x) O_j(y) = \sum_k C_{ijk}(x-y) O_k(y) \tag{43}$$

というもの。演算子積展開を用いると $n+1$ 点関数が n 点関数から計算できるので、原理的に任意の相関関数が計算可能。

共形場理論の知識を用いて、固定点の近傍についてのくりこみ群フローを考える。作用が固定点から微小にずれた

$$S = S_0 - \sum_i \frac{g_i}{l^{d-\Delta_i}} \int \mathrm{d}^d x\, O_i(x) \tag{44}$$

である場合を考える。分配関数を摂動展開すると、

$$Z_0 \left(1 + \sum_{i<j} \frac{g_i g_j}{l^{2d-\Delta_i-\Delta_j}} \int_{|x-y|>l} \mathrm{d}^d x\, \mathrm{d}^d y\, \langle O_i(x) O_j(y) \rangle + \cdots \right) \tag{45}$$

座標のスケール変換 $x \mapsto x' = \mathrm{e}^{-\delta\tau} x$ を行うと、

$$\begin{aligned} &\int \mathrm{d}^d x'_1 \cdots \mathrm{d}^d x'_n \, \langle O_{i_1}(x'_1) \cdots O_{i_n}(x'_n) \rangle \\ &= \mathrm{e}^{-\sum_{j=1}^n (d-\Delta_{i_j})\delta\tau} \int \mathrm{d}^d x_1 \cdots \mathrm{d}^d x_n \, \langle O_1(x_1) \cdots O_n(x_n) \rangle \end{aligned} \tag{46}$$

となる。この変化を結合定数の変化によって打ち消すためには

$$g_i \to \mathrm{e}^{(d-\Delta_i)\delta\tau} g_i \tag{47}$$

とすればよい。よって 1 次のくりこみ群は

$$\frac{\mathrm{d}g_i}{\mathrm{d}\tau} = (d-\Delta_i) g_i + \mathcal{O}(g^2) \tag{48}$$

で与えられる。この微分方程式の解の挙動は $d - \Delta_i$ の符号によって大きく変わる。$\Delta_i > d$ の場合、演算子 O_i は irrelevant であるといい、くりこみ変換によって g_i は減少する。$\Delta_i < d$ の場合、演算子 O_i は relevant であるといい、くりこみ変換に g_i は増加する。$\Delta_i = d$ の場合、演算子 O_i は marginal であるといい、高次の項を参照しないと g_i の増減は分からない。特に高次の項まで厳密に $\mathrm{d}g_i/\mathrm{d}\tau = 0$ が成り立つ場合、O_i による摂動を加えても理論は固定点にいることになる。このとき固定点は O_i 方向に線状に伸びており、O_i は exactly marginal であるという。自明な exactly marginal operator は free boson

$$S = \frac{\kappa}{2} \int \mathrm{d}^d x\, \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \tag{49}$$

に対する運動項 $\frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$ である。これを摂動として作用に加えても結合定数を $\kappa \mapsto \kappa + g$ とするだけなので、理論は固定点に居続ける。ただし、ϕ のスケール変換によって κ の値は自由に変更できるため、意味のある摂動ではない。この摂動が重要になるの

は $\phi + 2\pi R = \phi$ によって boson 場がコンパクト化されているときである。このとき ϕ を自由にスケール変換することはできないので、運動項 $\frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$ は非自明な exactly marginal operator になる。

2 次のくりこみ群はスケール変換のカットオフ l への影響を考えることで得られる。その際に演算子積展開

$$O_i(x)O_j(y) = \sum_k \frac{C_{ijk}}{|x-y|^{\Delta_i+\Delta_j-\Delta_k}} O_k(y) + \cdots \tag{50}$$

を用いる。ここで、スピンをもたないプライマリー演算子以外の寄与は $\cdots$ の中にまとめている。スケール変換によって短距離カットオフは $l \mapsto \mathrm{e}^{-\delta\tau} l$ となる。くりこみ変換の前後でカットオフを合わせるために、$\mathrm{e}^{-\delta\tau} < |x-y| < l$ の球殻上で相関関数を積分する。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{g_i g_j}{l^{2d-\Delta_i-\Delta_j}} \int_{\mathrm{e}^{-\delta\tau} l<|x-y|<l} \mathrm{d}^d x\, \mathrm{d}^d y\, O_i(x)O_j(y) \\
&\approx \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{g_i g_j}{l^{d-\Delta_i-\Delta_j}} S_{d-1}\delta\tau \int \mathrm{d}^d y \sum_k \frac{C_{ijk}}{l^{\Delta_i+\Delta_j-\Delta_k}} O_k(y) \\
&= \delta\tau \sum_k \frac{S_{d-1}}{2l^{d-\Delta_k}} \sum_{i,j} C_{ijk} g_i g_j \int \mathrm{d}^d y\, O_k(y)
\end{aligned} \tag{51}$$

この寄与を結合定数の変化としてくりこむことで、2 次のくりこみ群方程式

$$\frac{\mathrm{d}g_k}{\mathrm{d}\tau} = (d-\Delta_k)g_k + \frac{1}{2} S_{d-1} \sum_{i,j} C_{ijk} g_i g_j + \mathcal{O}(g^3) \tag{52}$$

を得る。

双対な模型

Coulomb 気体に対して双対な Solid on solid (SOS) 模型を導こう。分配関数

$$Z = \prod_x \sum_{q(x)\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-S[q]}, \quad S[q] = -2\pi^2 \beta (q, \Delta^{-1} q) \tag{53}$$

に対して Poisson 和公式

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}} f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k x} f(x) \tag{54}$$

を用いることで、

$$Z = \int \mathcal{D}q \sum_{m(x)\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-S[q]+2\pi\mathrm{i}(m,q)} \tag{55}$$

となる。ここでの q は $\mathbb{R}$ 係数であることに注意。q を integrate-out すると、m についての有効理論

$$S[m] = \frac{1}{2\beta}(m, \Delta m) \tag{56}$$

を得る。これは固体表面を表す Solid on solid (SOS) 模型であり、プラズマ相転移は roughening 相転移に対応する。さらに m が整数であることを忘れて

$$S[\phi] = \int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x} \left(\frac{\kappa}{2}(\partial_{\boldsymbol{x}}\phi)^2 - g\cos\phi\right), \quad \kappa = \frac{1}{4\pi^2\beta} \tag{57}$$

とすることで sine-Gordon 模型、あるいは clock 模型が得られる。ただし $m = \phi/2\pi$ とした。以前の節では BKT 転移が自由ボソン場の相転移ではないことを強調したが、双対な模型においては、BKT 転移は自由ボソン場の枠組みの中で理解できる。ただし摂動として $g\cos\phi$ の相互作用を考慮する必要がある。逆に Sine-Gordon 模型の分配関数を以下のように Cloumb 気体として表すことができる。

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}\phi \sum_k \frac{1}{k!}\left(g\int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}}{2}\right)^k \mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}\,\frac{\kappa}{2}(\partial_{\boldsymbol{x}}\phi)^2} \\ &= Z_0 \sum_n \frac{1}{(2n)!}\cdot\frac{(2n)!}{n!n!}\left(\frac{g}{2}\right)^{2n}\int \mathrm{d}^{2n}\boldsymbol{x}\exp\left(-\sum_{i<j}^{2n} q_i q_j \langle\phi(x_i)\phi(x_j)\rangle\right) \\ &\propto \sum_n \frac{1}{n!n!}\left(\frac{g}{2}\right)^{2n}\exp\left(-\sum_{i<j}^{2n} q_i q_j \Delta^{-1}(x_i, x_j)\right) \end{aligned} \tag{58}$$

ただし $Z_0, \langle\cdots\rangle_0$ はそれぞれ自由ボソン場に対する分配関数と期待値である。また q_i は $\cos\phi = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi})/2$ においてどちらの項を拾うかを表す ± 1 の変数であり、$i = 1, \dots, n$ のとき $+1$ で、$i = n+1, \dots, 2n$ のとき -1 とする。$\phi(x)$ の波数ゼロ成分についての経路積分がデルタ関数 $\delta(\sum_i q_i)$ を生むため、中性条件 $\sum_i q_i = 0$ が成り立つことに注意する。なお計算の途中で、

$$\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_i q_i\phi(x_i)}\rangle_0 = \exp\left(\sum_{i<j} q_i q_j \langle\phi(x_i)\phi(x_j)\rangle_0\right) \tag{59}$$

を用いた。このように見ると、Coulomb 気体から Sine-Gordon 模型へ書き換えは絶対値の大きな電荷 $\pm 2, \pm 3, \dots$ の寄与を無視することに対応している。

Sine-Gordon 理論の解析

自由ボソンはくりこみ群の自明な固定点であり、この固定点における演算子の次元および演算子積展開を求めることで、固定点の近傍におけるくりこみ群フローを知ることができる。vertex-operator [*1]

$$V_n(x) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi(x)} \tag{60}$$

に対し、

$$\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\phi(x)-\phi(0))} \rangle_0 \propto |\boldsymbol{x}|^{-n^2/2\pi\kappa} \tag{61}$$

である。ただし $\langle \cdot \rangle_0$ は自由ボソンによる期待値を表す。よって $\cos(n\phi)$ の共形次元は $\Delta_n = n^2/4\pi\kappa$ である。$\cos\phi$ が relevant になる条件は $1/4\pi\kappa < 2$ であるから、XY 模型の相転移点は

$$\kappa = \frac{1}{8\pi}, \quad \beta = \frac{2}{\pi} \tag{62}$$

となる。次に作用に $V_n(x)$ による微小な摂動が加わったとしよう。$\kappa < n^2/8\pi$ のとき $V_n(x)$ は relevant だから $\mathbb{Z}_n$ 対称性が自発的に破れる相が実現する。逆に $\kappa > n^2/8\pi$ ならば U(1) 対称性が低エネルギーで復活する。

くりこみ群の計算 1

スケール変換と短距離カットオフの変更 $l \mapsto \lambda > l$ に対して作用がどのように変化するかを見る。

$$\phi_l = \phi_\lambda + \delta\phi \tag{63}$$

とする。ただし $\delta\phi$ は短波長のゆらぎを表す。作用は

$$\begin{aligned} S = &\int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x} \left(\frac{\kappa_l}{2}(\partial_{\boldsymbol{x}}\phi_\lambda)^2 - g_l \cos(n\phi_\lambda) + \frac{\kappa_l}{2}(\partial_{\boldsymbol{x}}\delta\phi)^2 \right) \\ &+ \int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x} \left(-ng_l \sin(\phi_\lambda)\delta\phi + \frac{n^2}{2} g_l \cos(n\phi_\lambda)\delta\phi^2 \right) \end{aligned} \tag{64}$$

[*1] 正確には正規積によって $V_n(x) := :\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi}:$ と定義するべき。

となる。これを $\delta\phi$ について積分すると

$$\begin{aligned} S = \int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x} \left(\frac{\kappa_l}{2}(\partial_{\boldsymbol{x}}\phi_\lambda)^2 - g_l \cos(n\phi_\lambda) + \frac{1}{2} g_l \cos(n\phi_\lambda) K(0) \right) \\ - \int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}\, \mathrm{d}^2\boldsymbol{y}\, \frac{1}{2}(g_l)^2 \sin(n\phi_\lambda(\boldsymbol{x})) K(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \sin(n\phi_\lambda(\boldsymbol{y})) \end{aligned} \tag{65}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} K(\boldsymbol{x}) &= n^2 \langle \delta\phi(\boldsymbol{x}) \delta\phi(0) \rangle \\ &= \frac{n^2}{Z} \int \mathcal{D}(\delta\phi)\, \delta\phi(\boldsymbol{x}) \delta\phi(0) \exp\left(-\int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}\, \frac{\kappa_l}{2}(\partial_{\boldsymbol{x}}\delta\phi)^2 \right) \end{aligned} \tag{66}$$

である。また第 2 項は以下のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} &\int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}\, \mathrm{d}^2\boldsymbol{y}\, \frac{g_l^2}{4} [\sin(n\phi_\lambda(\boldsymbol{x})) - \sin(n\phi_\lambda(\boldsymbol{y}))]^2 K(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - \int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}\, \frac{g_l^2}{2} \sin^2(n\phi_\lambda) \bar{K} \\ &= \int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}\, \mathrm{d}^2\boldsymbol{y}\, \frac{g_l^2}{8} \cos^2(n\phi_\lambda(\boldsymbol{x})) (\partial_{\boldsymbol{x}}\phi_\lambda(\boldsymbol{x}))^2 |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2 K(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\ &- \int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}\, \frac{1}{2}(g_l)^2 (\sin(n\phi_\lambda(\boldsymbol{x})))^2 \bar{K} \end{aligned} \tag{67}$$

ここで $\bar{K} = \int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}\, K(\boldsymbol{x})$ である。$\cos(n\phi_\lambda)$ 以外の場を無視すると、

$$S = \int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x} \left(\frac{\kappa_\lambda}{2}(\partial_{\boldsymbol{x}}\phi_\lambda)^2 - g_\lambda \cos(n\phi_\lambda) \right) \tag{68}$$

となる。κ_λ, g_λ は以下のように与えられる。

$$g_\lambda = g_l - \frac{1}{2}K(0), \quad \kappa_\lambda = \kappa_l + \frac{n^2}{8} g_l^2 K_2 \tag{69}$$

$$K(0) = n^2 \int_{2\pi/\lambda < |\boldsymbol{k}| < 2\pi/l} \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{k}}{(2\pi)^2} \frac{1}{\kappa_l |\boldsymbol{k}|^2} = \frac{n^2}{2\pi\kappa_l} \ln\frac{\lambda}{l} \tag{70}$$

$$\begin{aligned} K_2 &= \int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}\, |\boldsymbol{x}|^2 K(\boldsymbol{x}) \\ &= n^2 \int_{2\pi/\lambda < |\boldsymbol{k}| < 2\pi/l} \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}\, \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{k}}{(2\pi)^2} \frac{\boldsymbol{x}^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - 0^+|\boldsymbol{x}|}}{\kappa_l \boldsymbol{k}^2} \\ &= \frac{\lambda - l}{l} \frac{3n^2 l^4}{16\pi^5 \kappa_l} \int \mathrm{d}\phi\, \frac{1}{(\cos\phi + \mathrm{i}0^+)^4} = \frac{\lambda - l}{l} \frac{3n^2 l^4}{2\pi^4 \kappa_l} \end{aligned} \tag{71}$$

くりこみ群方程式は、

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{n^2}{4\pi\kappa} \tag{72}$$

$$\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}\tau} = \frac{3n^4 l^4}{128\pi^5 \kappa} g^2 \tag{73}$$

となる。

繰り込み群の計算 2

次に OPE を使ってくりこみ群を求めてみる。

$$S = \int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x} \left(\frac{\kappa}{2} (\nabla\phi)^2 - \frac{g}{l^{2-\Delta_n}} \cos(n\phi) \right) \tag{74}$$

$$: \mathrm{e}^A :: \mathrm{e}^B : = \mathrm{e}^{\langle AB \rangle_0} : \mathrm{e}^{A+B} : \tag{75}$$

を用いると、

$$\begin{aligned} V_n(x) V_m(y) &= : \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi(x)} :: \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi(y)} : \\ &= \mathrm{e}^{-nm\langle \phi(x)\phi(y) \rangle_0} : \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi(x) + \mathrm{i}m\phi(y)} : \\ &= |x-y|^{nm/2\pi\kappa} V_{n+m}(y) + \cdots \end{aligned} \tag{76}$$

$$\begin{aligned} V_n(x) V_{-n}(y) &= \mathrm{e}^{n^2 \langle \phi(x)\phi(y) \rangle_0} : \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\phi(x)-\phi(y))} : \\ &= |x-y|^{-n^2/2\pi\kappa} \left(1 - \frac{n^2}{4} |x-y|^2 : (\nabla\phi)^2 : + \cdots \right) \end{aligned} \tag{77}$$

よって

$$\cos(n\phi)\cos(n\phi) = \frac{1}{2}|x-y|^{-n^2/2\pi\kappa} - \frac{n^2}{4}|x-y|^{2-n^2/2\pi\kappa} \cdot \frac{1}{2} : (\nabla\phi)^2 : + \cdots \tag{78}$$

$$\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}\tau} = \frac{n^2 g^2}{4} \tag{79}$$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\tau} = \left(2 - \frac{n^2}{4\pi\kappa} \right) g \tag{80}$$

少し違う結果が出たがいいのだろうか...