Jacobi の三重積と朝永-Luttinger 模型

政岡凜太郎

October 22, 2022

こんな式がある。

Jacobi の三重積

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n(n+1)/2} z^n = \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)(1+q^k z)(1+q^{k-1}z^{-1}) \tag{0.1}$$

これはもともと Jacobi がテータ関数を研究する中で見つけたものである。

複素関数論を使った証明も知られているが、ここでは組み合わせ論を使った証明をする。

分割と母関数

分割数

自然数 N を非増加の自然数列 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ によって

$$N = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \tag{1.1}$$

と表せるとき、$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ を N の分割と呼ぶ。N に対してあり得る分割の総数を $p(N)$ と書き、N の分割数という。

小さい N に対して、

$$\begin{aligned} p(1) &= 1, \\ p(2) &= 2, \\ p(3) &= 3, \\ p(4) &= 5. \end{aligned}$$

ボソン系の分配関数と分割数

エネルギー準位が $\epsilon, 2\epsilon, 3\epsilon, \ldots$ であるような、相互作用しないボソン系を考えよう。具体的には、以下のハミルトニアンを考える。

$$H = \sum_{k=1}^{\infty} k\epsilon n_k \tag{1.2}$$

n_k は準位 k にいるボソンの粒子数である。系の大分配関数は、

$$q = e^{-\beta\epsilon} \tag{1.3}$$

とおくことで、

$$\Xi(\beta, 0) = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n_k=0}^{\infty} q^{kn_k} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^k} \tag{1.4}$$

と表される。ただし、化学ポテンシャルは 0 とした。

ボソン系の分配関数と分割数

ここで、系のエネルギーを $E = N\epsilon$ と固定すると、系が取りうる状態の数は N の分割数 $p(N)$ に一致する。したがって、

$$\Xi(\beta, 0) = \sum_{N=1}^{\infty} p(N) q^N \tag{1.5}$$

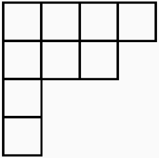
と書ける。ここから、分割数の母関数に対する恒等式

$$\sum_{N=1}^{\infty} p(N) q^N = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^k} \tag{1.6}$$

を得る。

Young 図形

例えば $9 = 4 + 3 + 1 + 1$ であるが、これを以下のような箱を並べた図形で表す。



このような図形を Young 図形と呼ぶ。

7 を異なる自然数で分割すると、

$$7 = 6 + 1 = 5 + 2 = 4 + 3 = 4 + 2 + 1 \tag{1.7}$$

の 5 通りである。これをストリクトな分割と呼ぶ。一方 7 を奇数のみで分割すると、

$$7 = 5 + 2 \cdot 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 3 + 4 \cdot 1 = 7 \cdot 1 \tag{1.8}$$

で、この場合も 5 通りである。一般の N に対し、異なる自然数による分割の数を $p_{\mathrm{str}}(N)$、奇数による分割の数を $p_{\mathrm{odd}}(N)$ とおく。実は任意の N に対して

$$p_{\mathrm{str}}(N) = p_{\mathrm{odd}}(N) \tag{1.9}$$

が成り立つ。これを Euler の分割恒等式と呼ぶ。

Euler の分割恒等式

Euler の分割恒等式は、分割の間の全単射を構成することで証明される。

$$(7) \leftrightarrow (7)$$

$$(6,1) \leftrightarrow (3,3,1)$$

$$(4,2,1) \leftrightarrow (1,1,1,1,1,1,1)$$

母関数の恒等式

Euler の分割恒等式を母関数の世界から見てみる。

ストリクトな分割は、エネルギー準位が $\epsilon, 2\epsilon, 3\epsilon, \ldots$ であるようなフェルミ系に、粒子を配置することと等価である。この系の分配関数は

$$\Xi_{\mathrm{F}}(\beta, 0) = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n_k=0,1} q^{kn_k} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + q^k) \tag{1.10}$$

となる。ただし $q = e^{-\beta\epsilon}$ である。したがって、

$$\sum_{N=1}^{\infty} p_{\mathrm{str}}(N) q^N = \prod_{k=0}^{\infty} (1 + q^k) \tag{1.11}$$

が成り立つ。

母関数の恒等式

奇数による分割は、エネルギー準位が $\epsilon, 3\epsilon, 5\epsilon, \ldots$ であるようなボース系に、粒子を配置することと等価である。この系の分配関数は $q = e^{-\beta\epsilon}$ として、

$$\Xi_{\mathrm{B}}(\beta, 0) = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n_k=0}^{\infty} q^{(2k-1)n_k} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^{2k-1}} \tag{1.12}$$

と計算できるから、

$$\sum_{N=1}^{\infty} p_{\mathrm{odd}}(N) q^N = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^{2k-1}} \tag{1.13}$$

が成り立つ。

(1.11) と (1.13) を見比べると、

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+q^k)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^{2k-1}} \tag{1.14}$$

を得る。これは以下のように直接示すことができる。

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{\infty}(1+q^k)&=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1-q^{2k}}{1-q^k}\\&=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1-q^{2k}}{(1-q^{2k})(1-q^{2k-1})}\\&=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^{2k-1}}\end{aligned} \tag{1.15}$$

Jacobi の三重積

マヤ図形

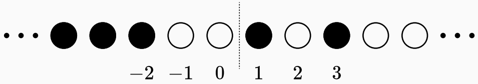
整数に $\bullet, \circ$ のいずれかを対応づけるような写像

$$M : \mathbb{Z} \to \{\bullet, \circ\} \tag{2.1}$$

であって、$k \gg 0$ で

$$M(-k) = \bullet, \quad M(k) = \circ \tag{2.2}$$

を満たすものをマヤ図形と呼ぶ。これを以下のように図示する。



$k > 0$ の領域にある $\bullet$ を**電子**と呼び、$k \leq 0$ の領域にある $\circ$ を**ホール**と呼ぶ。

マヤ図形 M の電荷を

$$Q(M) = (\text{電子の総数}) - (\text{ホールの総数}) \tag{2.3}$$

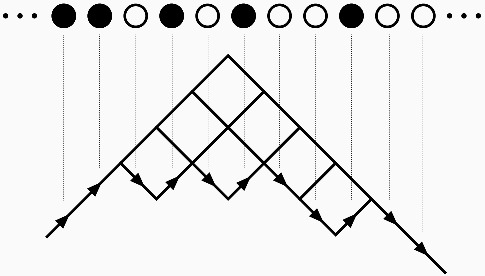
と定義する。

電子が $k > 0$ にいるとき、その電子のエネルギーを k と定義する。またホールが $k \leq 0$ にいるとき、そのホールのエネルギーを $-k$ と定義する。マヤ図形のエネルギーを

$$E(M) = (\text{電子のエネルギーの総和}) + (\text{ホールのエネルギーの総和}) \tag{2.4}$$

によって定義する。

Young 図形とマヤ図形の対応関係

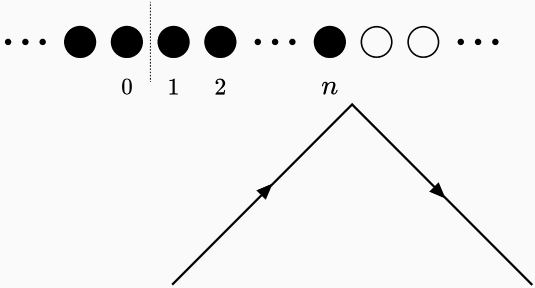


上図のように、マヤ図形に Young 図形を対応付けることができる。また Young 図形から原点の自由度を除いてマヤ図形を決定することができる。

このようにして、マヤ図形の集合 $\mathcal{M}$ と、整数とヤング図形の集合の直積集合 $\mathbb{Z} \times Y$ との間の全単射が得られる。

Young 図形とマヤ図形の対応関係

基底状態を以下のように設定する。

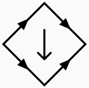


基底状態の電荷を n とすると、エネルギーは $n(n+1)/2$ である。

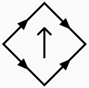
Young 図形とマヤ図形の対応関係

基底状態に以下で定義する操作 $a_{k+1}^{\dagger}a_k$ を繰り返すことで、任意のマヤ図形および Young 図形を構成できる。

$a_{k+1}^{\dagger}a_k$: ●○ $\longrightarrow$ ○● ,



$a_{k}^{\dagger}a_{k+1}$: ○● $\longrightarrow$ ●○ ,



基底状態に $a_{k+1}^{\dagger}a_k$ を N 回掛けた場合にあり得るマヤ図形の数は、大きさ N の Young 図形の数 $p(N)$ に一致する。

Jacobi の三重積

マヤ図形に対する母関数を考える。Young 図形とマヤ図形の対応関係から、マヤ図形を (N, Q) によってラベル付けすると、

$$\sum_{M \in \mathcal{M}} q^{E(M)} z^{Q(M)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{N=0}^{\infty} p(N) q^{E_0 + N} z^n \tag{2.5}$$

となる。ただし $E_0 = n(n+1)/2$ である。一方、$k \in \mathbb{Z}$ に $\bullet$ があるか $\circ$ があるかによってマヤ図形をラベル付けすると、

$$\sum_{M \in \mathcal{M}} q^{E(M)} z^{Q(M)} = \prod_{k=0}^{\infty} (1 + q^k z^{-1}) \prod_{k=1}^{\infty} (1 + q^k z) \tag{2.6}$$

となる。

Jacobi の三重積

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{N=0}^{\infty}p(N)q^{E_0+N}z^n=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^k}\sum_{n\in\mathbb{Z}}q^{n(n+1)/2}z^n \tag{2.7}$$

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1+q^kz^{-1})\prod_{k=1}^{\infty}(1+q^kz)=\prod_{k=1}^{\infty}(1+q^{k-1}z^{-1})(1+q^kz) \tag{2.8}$$

2 つを等号で結ぶことで、

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}q^{n(n+1)/2}z^n=\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)(1+q^kz)(1+q^{k-1}z^{-1}) \tag{2.9}$$

となって、Jacobi の三重積が証明された。

朝永-Luttinger 模型

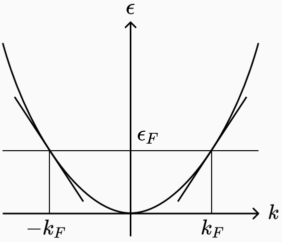
ボソンフェルミオン対応

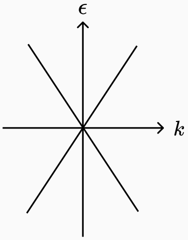
マヤ図形と Young 図形の対応関係から、Jacobi の三重積という不思議な式が現れることを見た。以降はこの対応関係が応用される例として、朝永-Luttinger 模型について説明する。

1 次元のフェルミ粒子系を考える。基底状態からの低エネルギー励起においては、フェルミ運動量 $k_F, -k_F$ を基準にすることで、分散関係は

$$\epsilon = \pm v_F k \tag{3.1}$$

と書ける。





朝永-Luttinger 模型はフェルミ準位近くの低エネルギー励起をモデル化した模型で、ハミルトニアンの運動項は以下のように与えられる。

$$H_0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k \left[a_+^\dagger(k) a_+(k) - a_-^\dagger(k) a_-(k) \right] \tag{3.2}$$

ただし、波数は整数値をとるように再定義した。またエネルギーの次元をもつ定数を掛けるべきだが、それも省略した。$a_\pm(k)$ は以下の反交換関係を満たす。

$$\{a_j(k), a_{j'}(k')\} = \{a_j^\dagger(k), a_{j'}^\dagger(k')\} = 0 \tag{3.3}$$

$$\{a_j(k), a_{j'}(k')\} = \delta_{j,j'}\delta_{k,k'} \tag{3.4}$$

ただし、j, j' は $\pm$ に値をとるとする。

相互作用項については、後で述べる。

基底状態において $k=0$ までの準位が全て電子で埋められているとする。このとき、

$$a_+(k) = \begin{cases} b_k & (k \geq 0) \\ c_k^\dagger & (k < 0) \end{cases}, \quad a_-(k) = \begin{cases} b_k & (k < 0) \\ c_k^\dagger & (k \geq 0) \end{cases} \tag{3.5}$$

によって電子とホールの生成消滅演算子を定義すると、

$$H_0 = \sum_k |k|(b_k^\dagger b_k + c_k^\dagger c_k) + W \tag{3.6}$$

となる。ただし、W は基底状態のエネルギーであり、以下のように与えられる。

$$W = \sum_{k<0} k - \sum_{k\geq 0} k \tag{3.7}$$

これは負の無限大の量だが、定数だから気にしないことにする。

ボソン化法

H_0 に対する大分配関数は、$q = e^{-\beta}$ として Jacobi の三重積 (2.9) を用いると、

$$\Xi(\beta, 0) = \prod_{k\in\mathbb{Z}} \left(1 + q^{|k|}\right)^2 = \left[\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^k} \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n(n+1)/2}\right]^2 \tag{3.8}$$

となる。この式はフェルミオンフォック空間の中に、ボソンフォック空間が隠れていることを示唆している。これを具体的に構成してみよう。

密度演算子を以下のように定義する。

$$\rho_+(p) = \sum_k a_+^\dagger(k+p)a_+(k), \quad \rho_-(p) = \sum_k a_-^\dagger(k+p)a_-(k) \tag{3.9}$$

これらは交換関係

$$[\rho_+(p), \rho_-(p')] = 0 \tag{3.10}$$

$$[\rho_+(-p), \rho_+(p')] = [\rho_-(p), \rho_-(-p')] = p\delta_{p,p'} \tag{3.11}$$

を満たす (以降で計算する)。

$$A_p = \frac{1}{\sqrt{p}}\rho_+(p), \quad A_p^\dagger = \frac{1}{\sqrt{p}}\rho_+(-p) \tag{3.12}$$

$$B_p = \frac{1}{\sqrt{p}}\rho_-(-p), \quad B_p^\dagger = \frac{1}{\sqrt{p}}\rho_-(p) \tag{3.13}$$

と定義すれば、$A_p, A_p^\dagger, B_p, B_p^\dagger$ はボソンの生成消滅演算子となる。

交換関係

$p \neq p'$ のとき、

$$[\rho_+(-p), \rho_+(p')] = \sum_{k,k'} \left[a_+^\dagger(k-p)a_+(k), a_+^\dagger(k'+p')a_+(k')\right] \tag{3.14}$$

となる。これは、

$$\begin{aligned}
[AB, CD] &= A[B, CD] + [A, CD]B \qquad (3.15)\\
&= A\{B, C\}D - AC\{D, B\} + \{A, C\}DB - C\{D, A\}B \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

から、

$$\begin{aligned}
[\rho_+(-p), \rho_+(p')] &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_+^\dagger(k-p)a_+(k-p') \qquad (3.17)\\
&\quad - \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_+^\dagger(k-p+p')a_+(k) = 0 \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

と計算できる。

同様に、$p = p'$ のとき、

$$[\rho_+(-p), \rho_+(p)] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(a_+^\dagger(k-p)a_+(k-p) - a_+^\dagger(k)a_+(k) \right) \tag{3.19}$$

であるが、これはゼロにはならない！

任意の状態ベクトルに対して、

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_+^\dagger(k-p)a_+(k-p), \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_+^\dagger(k)a_+(k) \tag{3.20}$$

を作用させると、フェルミの海に無限に粒子が詰まっていることから、状態ベクトルは発散してしまう。このことから項を足し上げる順序を安易に変えてはいけないことが分かる。

状態空間の中で $k \leq k_0$ の準位が完全に占有されているような部分空間を考える。このとき、

$$
\begin{aligned}
[\rho_+(-p), \rho_+(p)] &= \sum_k (n_+(k-p) - n_+(k)) && (3.21) \\
&= \left[\sum_{k \leq k_0} + \sum_{k_0 < k}\right](n_+(k-p) - n_+(k)) \\
&= \sum_{k_0 < k} (n_+(k-p) - n_+(k)) \\
&= \sum_{k_0 < k \leq k_0 + p} n_+(k-p) = p && (3.22)
\end{aligned}
$$

となる。結果は p_0 に依存しないので、$p_0 \to -\infty$ とできる。$\rho_-(p)$ についても同様に計算することで、(3.11) が成り立つことが分かる。

つぎに、密度演算子とハミルトニアンの交換関係を計算する。

$$
\begin{aligned}
[H_0, \rho_\pm(p)] &= \pm \sum_{k,k'} k \Big[a^\dagger_\pm(k) a_\pm(k), a^\dagger_\pm(k'+p) a_\pm(k') \Big] \\
&= \pm \sum_{k} k \Big(a^\dagger_\pm(k) a_\pm(k-p) - a^\dagger_\pm(k+p) a_\pm(k) \Big) \\
&= p \sum_{k} a^\dagger_\pm(k) a_\pm(k-p) \\
&= \pm p \rho_\pm(p)
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

よって

$$
[H_0, A_p] = pA_p, \quad [H_0, B_p] = pB_p \tag{3.24}
$$

となる。

ハミルトニアンの書き換え

交換関係から、

$$H_0 = \sum_{p>0} p(A_p^\dagger A_p + B_p^\dagger B_p) \tag{3.25}$$

と表せそう。実際は、

$$H_0 = \sum_{p>0} p(A_p^\dagger A_p + B_p^\dagger B_p) + \frac{1}{2}Q_+(Q_+ + 1) + \frac{1}{2}Q_-(Q_- - 1) \tag{3.26}$$

となる。ただし、

$$Q_+ = \sum_{k\geq 0} b_k^\dagger b_k - \sum_{k<0} c_k^\dagger c_k, \quad Q_- = \sum_{k<0} b_k^\dagger b_k - \sum_{k\geq 0} c_k^\dagger c_k \tag{3.27}$$

である。$Q_\pm = \sum_k a_\pm^\dagger(k) a_\pm(k) + \mathrm{const.}$ から、A_p, B_p が $Q_\pm$ と交換することが分かる。

A_p, B_p が $Q_\pm$ の固有値を変化させないことから、状態空間を Q_+, Q_- の固有空間に分けることにする。基底状態 $|\Omega_{m,n}\rangle$ を

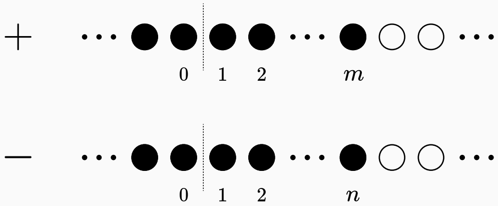
$$Q_+ |\Omega_{m,n}\rangle = m, \quad Q_- |\Omega_{m,n}\rangle = n \tag{3.28}$$

および

$$A_p |\Omega_{m,n}\rangle = B_p |\Omega_{m,n}\rangle = 0 \tag{3.29}$$

によって定義する。Q_+, Q_- の固有値が m, n であるような状態は $|\Omega_{m,n}\rangle$ に $A_p^\dagger, B_p^\dagger$ を掛けていくことで得られる。

基底状態は、以下のマヤ図形で表される。



よって基底状態のエネルギーは (真空のエネルギーを除いて)、

$$\langle \Omega_{m,n} | H_0 | \Omega_{m,n} \rangle = \frac{1}{2} m(m+1) + \frac{1}{2} n(n-1) \tag{3.30}$$

となる。したがって、(3.26) が成り立つことが分かる。

相互作用項

次に、以下のような相互作用項を考える。

$$H_{\mathrm{int}} = \frac{1}{2\pi}\sum_{p>0} pV(p)(A_p^\dagger A_p + B_p B_p^\dagger + A_p^\dagger B_p^\dagger + A_p B_p) \tag{3.31}$$

フェルミオン演算子で書くと、

$$A_p^\dagger A_p = \sum_{k,k'\in\mathbb{Z}} a_+^\dagger(k-p)a_+(k)a_+^\dagger(k'+p)a_+(k') \tag{3.32}$$

$$B_p B_p^\dagger = \sum_{k,k'\in\mathbb{Z}} a_-^\dagger(k-p)a_-(k)a_-^\dagger(k'+p)a_-(k') \tag{3.33}$$

$$A_p^\dagger B_p^\dagger = \sum_{k,k'\in\mathbb{Z}} a_+^\dagger(k-p)a_+(k)a_-^\dagger(k'+p)a_-(k') \tag{3.34}$$

$$A_p B_p = \sum_{k,k'\in\mathbb{Z}} a_+^\dagger(k+p)a_+(k)a_-^\dagger(k'-p)a_-(k') \tag{3.35}$$

ハミルトニアンを対角化するために，Bogoliubov 変換

$$\begin{pmatrix} \alpha_p \\ \beta_p^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta_p & \sinh\theta_p \\ \sinh\theta_p & \cosh\theta_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_p \\ B_p^\dagger \end{pmatrix} \tag{3.36}$$

を用いる．θ_p は後で求めるとして，まずこの変換の性質について述べておく．変換行列を $U(\theta_p)$ とおくと，これは明らかにエルミートである．また θ に関する加法性

$$U(\theta)U(\theta') = U(\theta + \theta') \tag{3.37}$$

が成り立つ．$U(0) = I$ であるから $U(-\theta) = U(\theta)^{-1}$ である．さらに，

$$\eta U(\theta)\eta = U(-\theta) = U(\theta)^{-1}, \quad \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.38}$$

が分かる．

ここで，

$$\begin{pmatrix} [A,C] & [A,D] \\ [B,C] & [B,D] \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & D \end{pmatrix} \right] \tag{3.39}$$

という表記を導入しよう．すると，

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} \alpha_p \\ \beta_p^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{p'}^\dagger & \beta_{p'} \end{pmatrix} \right] &= U \left[\begin{pmatrix} A_p \\ B_p^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{p'}^\dagger & B_{p'} \end{pmatrix} \right] U \\ &= \delta_{p,p'} U \eta U = \delta_{p,p'} U \eta U \eta \eta \\ &= \delta_{p,p'} \eta \end{aligned} \tag{3.40}$$

となる．すなわち

$$[\alpha_p, \alpha_{p'}^\dagger] = [\beta_p, \beta_{p'}^\dagger] = \delta_{p,p'}, \tag{3.41}$$

$$[\alpha_p, \beta_{p'}] = [\alpha_p^\dagger, \beta_{p'}^\dagger] = 0 \tag{3.42}$$

となる．その他の交換関係は明らかにゼロになるから，Bogoliubov 変換は交換関係を保つ．

ここで、

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} A_p^\dagger & B_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p + pV(p)/2\pi & pV(p)/2\pi \\ pV(p)/2\pi & p + pV(p)/2\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_p \\ B_p^\dagger \end{pmatrix} \\
&= E_p \begin{pmatrix} A_p^\dagger & B_p \end{pmatrix} U(2\theta_p) \begin{pmatrix} A_p \\ B_p^\dagger \end{pmatrix} \\
&= E_p \begin{pmatrix} A_p^\dagger & B_p \end{pmatrix} U^\dagger(\theta_p) U(\theta_p) \begin{pmatrix} A_p \\ B_p^\dagger \end{pmatrix} \\
&= E_p (\alpha_p^\dagger \alpha_p + \beta_p \beta_p^\dagger)
\end{aligned} \tag{3.43}$$

と書ける。ただし、

$$E_p = p\sqrt{1 + \frac{V(p)}{\pi}}, \quad \tanh(2\theta_p) = \frac{V(p)}{V(p) + 2\pi} \tag{3.44}$$

である。

Bogoliubov 変換

したがって、ハミルトニアンは

$$H = \sum_{p>0} E_p(\alpha_p^\dagger \alpha_p + \beta_p^\dagger \beta_p) + E_0(Q_+, Q_-) \tag{3.45}$$

$$E_0 = \sum_{p>0} (E_p - p) + \frac{1}{2} Q_+(Q_+ + 1) + \frac{1}{2} Q_-(Q_- - 1) \tag{3.46}$$

と対角化される。$E_p - p$ は $B_p^\dagger B_p,\ \beta_p \beta_p^\dagger$ の順序を入れ替えるときに出てくる補正である。